Feuille d'exercices N°28

Lundi le:09-Juin-2003

Propriétés analytiques,géometriques et métriques des courbes

1. On considère les deux ellipses : $(\xi)\ :\ \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ et $(\xi')\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
   - **a**. A quelle condition une droite d ' équation : $ux+vy+w=0$ est tangente a (ξ')
   - **b**. Pour tout point M de (ξ) on mène les deux tangentes a (ξ') qui recoupent (ξ) en P et Q montrer que la droite (PQ) est tangente a (ξ')(utiliser les coordonnées polaires)
2. soit P la parabole d'équation : $y^2=2px$ $(p>0)$
   - **a**. Quel est l'ensemble (ξ) des points du plan par lesquels passent trois normales a la parabole
   - **b**. Quel est l'ensemble $(\xi')\subset(\xi)$ des points tel que deux parmi ces trois droites sont perpendiculaires
3. Soit D la droite de IR^3 passanat par O et dirgiée par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$,$S$ la surface obtenue par rotation de D autour de (Oz)
   - **a**. Donner une équation cartesienne de S
   - **b**. Déterminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ normal a S au point M de coordonnées (x,y,z),en quel point ce vecteur n'est-il pas défini?
   - **c**. Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)=f(t)\cos(t)\\ y(t)=f(t)\sin(t)\\ z(t)=f(t)\end{cases}$ où $f\ :\ IR\to IR$ de classe $\wp^2$.Montrer S que est tracée sur (γ)
   - **d**. Déterminer une équation du plan osculateur a (γ) ai point de paramétre t sous la forme : $(x-f(t)\cos(t))A(t)+(y-f(t)\sin(t))B(t)+(z-f(t))C(t)=0$.Expliciter A,B,C en fonction t,f,f',f"
   - **e**. On suppose que : $2ff"-4f'^2-f^2=0$
     - **i**. Montrer alors ce plan contient la normale a S
     - **ii**. Intégrer cette équation en utilisant $g=\frac{1}{f}$
     - **iii**. En déduire une équation polaire de la projection (γ) de sur (xOy)
4. Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)=a(1+\cos(t))\\ y(t)=a\sin(t)\end{cases}$ $a>0$
   - **a**. Reconnaitre la nature géometrique de (γ)
   - **b**. Soit (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a (γ).Donner une repésentation paramétrique de (Γ).
   - **c**. En déduire une équation polaire de (Γ)
   - **d**. Soit M un point de (Γ) d'angle polaire θ,$\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M à (Γ) orienté dans le sens des θ croissants,exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{\tau}}\right)$,en déduire les poins de (Γ) où la tangente est verticale ou horizontale
   - **e**. Soit D_α la droite passant par O d'angle polaire $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
     - **i**. Montrer que D_α recoupe (Γ) en deux points M_α,M'_α
     - **ii**. Calculer la longueur du segment $[M_\alpha,M'_\alpha]$
     - **iii**. Déterminer le lieu H des milieux de $[M_\alpha,M'_\alpha]$ quand $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
     - **iv**. En déduire une construction géomterique des points M_α,M'_α

5. Soit (γ) arc géométrique plan tel que :$\forall M \in (\gamma)$ on a: l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où C est le centre de courbure de (γ) au point M
   - **a**. Si α désigne l'ange entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M montrer que : $x^2 + y^2 - \left(x\frac{dy}{d\alpha} - y\frac{dx}{d\alpha}\right)$.
   - **b**. Si θ désigne l'ange entre la droite (OM) et l'axe (Ox),β celui entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M, montrer que $\frac{d\theta}{d\alpha}$.et que $tg(\beta) = \frac{r}{r'}$(on pourra utiliser les coordonnes polaires avec $r = OM$).
   - **c**. En déduire que (γ) est une spirale.
6. Soit (γ) arc géométrique plan définie par l'équation polaire : $r(\theta) = sin(\frac{\theta}{n})^n$où $n \in IN^*, 0 < \theta < n\pi$
   - **a**. calculer $\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\|$.
   - **b**. En déduire que si β est l'angle entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M alors : $\beta = \frac{\theta}{n}$.
   - **c**. En déduire l'angle α entre l'axe (Ox) et la tangente a (γ) au point M, puis R le rayon de courbure.
   - **d**. Soit M' la projection orthogonale de C ,centre de courbure de (γ) au point M, sur la droite (OM), montrer que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n+1}$
7. Construire les courbes d'équation polaire :
   - **a**. $\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-1}$
   - **b**. $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
   - **c**. $\rho(\theta) = \theta\sin(\theta)$
   - **d**. $\rho(\theta) = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$
   - **e**. $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$
   - **f**. $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$
8. Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos(t)} \\ y(t) = \sqrt{\sin(t)} \end{cases}$ $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coincide vaec l'origine
9. Déterminer les courbes pour lesquelles $\widehat{MOC} = \frac{\pi}{2}$, C centre de courbure au point M de la courbe
10. Soit (γ) courbe plane parametrée de classe $\wp^3$, (γ_1) l'ensemble des centre de courbure de (γ) ,si $M \in (\gamma)$, C centre de courbure de (γ) au point M, C_1 centre de courbure de (γ_1) au point C, I le milieu de $[M,C]$, (γ_2) l'ensemble de ces milieux ; montrer que la tangente a (γ_2) au point I est orthogonal a $\overrightarrow{MC_1}$
11. Soit (γ) courbe plane parametrée de classe $\wp^1$, a tout point M de (γ) on associé la projection orthogonale H de O sur la tangente en M a (γ), soit (γ_1) l'ensemble de ces projections , montrer que la normale a (γ_1) en H contient le milieu de $[O,M]$
12. Soit M un point d'une ellipse de foyers F et F', montrer que la bissectrice de $\widehat{MF,MF'}$ est normale a l'ellipse au point M
13. Soit deux cercles de centres $\Omega(a,0)$ et $\Omega'(-a,0)$ et de rayons R et R' respectivement.Montrer que les droites D coupant ces deux cercles suivant des cordes de meme longueur sont tangente à une parabole fixe dont on donnera l'équation
14. Soit $(\gamma),(\gamma')$ deux cercles de centres $\Omega(1,0)$ et $\Omega'(-R,0)$ et de rayons 1 et R respectivement
   - **a**. Donner l'équation de la tangente à (γ) au point $M(1 + \cos(\theta), \sin(\theta))$
   - **b**. Ecrire une CNS sur R et θ pour que cette droite reste tangente a (γ') aussi, donner les coordonnés du point de contact $P \in (\gamma')$
   - **c**. Déterminer le lieu géometrique des milieux de $[M,P]$