Série 3 : *Nombres Réels*

Jeudi le 02 Octobre 2003

1.Inégalités :

Exercice 1:

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .Montrer que :

1. $|x| + |y| \leqslant |x + y| + |x - y|$.
2. $1 + |xy - 1| \leqslant (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 2:

Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que : $|\frac{x-1}{x+3}| \leqslant 2$.

Exercice 3:

Montrer que $\forall x \geqslant 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leqslant ln(1+x) \leqslant x$ .En déduire la limite de $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Exercice 4:

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $n \in \mathbb{N}^*, x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ des nombres réels.Montrer que $|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{\frac{1}{2}}$

On pourra considérer la fonction $t \longmapsto \sum_{i=1}^{n}(tx_i + y_i)^2$ *étudier son signe et utiliser un résultat connu sur le signe des fonctions de la forme* $at^2 + bt + c$.

Exercice 5:

Montrer que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$une famille de réels tous dans l'intervalle $[0, 1]$ $\exists (i, j) \in [0, 1]^2$ tel que : $i \neq j, |x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.
2. Quel est le lien de ce résultat avec le *lemme des tiroirs* .
3. Soit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ .Montrer que :$\exists (p, q) \in \mathbb{N}$ x $[|1, n|]$ tel que : $|x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$.

   On pourra considérer $\{qx - E(qx)/q \in [|0, n|]$ *et séparer* $[0, 1[$ *en* n *intervalles* .

Exercice 7:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Montrer que : $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 8:

Une autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $n \in IN^*$. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de réels.

1. Démontrer la formule $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum\limits_{1\leq i<j\leq n}^{n} (x_i y_i - x_j y_j)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.
   On pourra raisonner par récurrence .
2. En déduire l'inégalité dite de *Gauchy-Shwarz :* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.
3. En déduire l'inégalité dite de *Hölder :* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
   <u>Indication :</u> $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)$ *puis utilise l'inégalite de Cauchy-Schwarz pour les deux sommes .*

Exercice 9:

Soit $n \geq 2$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{*+}$.Montrer que : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$.*On pourra raisonner par récurrence .*

Exercice 10:

Soit $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de $[0, 1]$ .Etablir que l'un au moins des deux produits $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ ou $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - a_i)$ est inférieur ou égale a 2^{-n} .

Exercice 11:

Soit $x > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x+n}$.

2.Bornes supérieures,inférieures :

Exercice 12:

Déterminer,quand elles existent,les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n / n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $B = \left\{n^2 + \frac{1+(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $C = \left\{E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right) / x > 0\right\}$
4. $D = \left\{\frac{p-q}{p+q+1} / (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}; p \geq q\right\}$.
5. $E = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} / (n, m) \in \mathbb{N}^2\right\}$.
6. $E = \left\{1 - \frac{1}{n-m} / (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m\right\}$.

Exercice 13:

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\varepsilon>0$ on ait : $a<b+\varepsilon$,montrer alors que : $a\leqslant b$.

On demande de faire un raisonnement rigoureux et surtout de ne pas répondre on fait tendre ε vers zéro .

Exercice 14:

Soient A,B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.

1. On note par $A+B$ l'ensembles des réels de la forme $a+b$ tels que $a\in A, b\in B$ .Montrer que *sup(A+B)=sup(A)+sup(B)* .
2. On note par -A l'ensembles des réels de la forme -a tels que $a\in A$ .Montrer que *sup(-A)=-inf(A),inf(-A)=-sup(B)* .
3. On note par A-B l'ensembles des réels de la forme a-b tels que $a\in A, b\in B$ .Montrer que *sup(A-B)=sup(A)-inf(B)* .

3.Partie entiére :

Exercice 15:

soit $n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$. Montrer les propriétes suivantes :

1. $E(\frac{E(nx)}{n})=E(x)$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}E\left(\frac{x+k}{n}\right)=E(x)$.
4. $0\leq E(nx)-nE(x)\leq n-1$.
5. $E(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})=E(\sqrt{4n+2})$.

Exercice 16:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ .Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*$ on a : $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leq\frac{1}{2\sqrt{k}}\leq\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ .En déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc