Série 2 : *Entiers naturels*

Mercredi 29 Septembre 2004

Exercice 1:

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
3. 9 divise $2^{2n} + 15n - 1$.
4. $\forall k \in [|0, n|]$ on a : $C_{2n}^{k} \leq C_{2n}^{n}$.
5. $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{(mn)!}{m!n!} \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n; 0! = 1$ *et pour* $p \leq n$, $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ *et enfin pour* $p > n; C_n^p = 0$.

Exercice 2:

Suite de Fibonnacci : On pose $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\varphi^n + \mu\varphi'^n$ avec φ, φ' solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ et $\lambda + \mu = 0, \lambda\varphi + \mu\varphi' = 1$.

Exercice 3:

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leq i \leqslant j \leq n} ij, \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2, \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i,j), \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \max(i,j) \ .$$

Exercice 4:

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \forall p \in [|0, n|]$ on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

On pourra utiliser une récurrence descendante et la formule du triangle de Pascal $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca