www.chez.com/myismail©2002

**MPSI 1** **2002-2003**

**CPGE Agadir**

# Feuille d'exercices N°4

**Mercredi le:25- Septembre-2002**

**Nombres reels**

## Généralités

1. **Montrer que** $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$
2. **Soit** $A$ **une partie de** $IR$ **bornée non vide, montrer que** : $sup\{|x-y| / (x,y) \in AxA\} = sup(A) - inf(A)$
3. **Soit** $n \in IN$ **et** $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ **une famille de réels de l'intervalle** $[0,1]$. **montrer que** :$\exists(i,j) \in [0,1]^2$ **tel que**: $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.(*lemme des tiroirs*)
4. **Quelles sont les bornes inférieures et supérieures (quand elles existent des ensembles suivants** ):
   - **A** $=\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n / n \in IN^*\right\}$
   - **B** $=\left\{n^2+\frac{1+(-1)^n}{n} / n \in IN^*\right\}$
   - **C** $=\left\{E(x)+E(\frac{1}{x}) / x > 0\right\}$
   - **D** $=\frac{p-q}{p+q+1} / (p,q) \in {IN^*}^2$ *avec* $p \geq q$
5. **Soit** $n \in IN^*$ **Montrer que** : $\sqrt[n]{n} \leq 1+\sqrt{\frac{2}{n}}$

## Sommation

1. **Soit** $n \in IN^*$ . **Soient** $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ **et** $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ **deux familles de réels**.
   a. **Démontrer la formule** : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i y_i - x_j y_j)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$
   b. **En déduire l'inégalité de** *Gauchy – Shwarz*: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$
2. **Soit** $n \in IN^*$ **et** $a_1,a_2,.....,a_n$ **des éléments de** $IR^{*+}$.**Montrer que** : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$
3. **Soit** $n \in IN^*$ **et** $a_1,a_2,.....,a_n$ **des éléments de** $[0,1]$ .**Etablir que l'un au moins des deux produits** $\prod_{i=1}^{n} a_i$ **ou** $\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)$ **est inférieur ou égale a** $2^{-n}$.
4. **Soit** $x > 0$ **et** $n \in IN^*$ **Montrer que** : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{x+n}$

**Partie Entière**

1. **soit** $n \in IN^*, x \in IR$ **Montrer que** : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
2. a. **Montrer que** : $\forall x \in IR, E(x) + E(-x) = -1$ **si** $x \notin Z$**et** $E(x) + E(-x) = 0$ **si** $x \in Z$.
   b. **En déduire que si** $p$ **et** $q$ **sont deux entiers naturels premier entre eux alors**: $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$
3. **Soit** $n \in IN^*, x \in IR$ **, montrer que** : $\sum_{k=1}^{n-1} .E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$
4. a. **Démontrer que** : $\forall n \in IN^*: E\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) = E\left(\sqrt{4n+2}\right)$
   b. **Soit** $n \in IN^*$ **, calculer** : $\sum_{k=1}^{n} E\left(\sqrt{k}\right)$ **et** $\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{k+3\sqrt{k}}{k}\right)$
5. **Soit** $x > 0$ **et** $n \in IN^*$ **Montrer que** : $\sum_{k=1}^{n-1} .E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x)$
6. a. **Monter que** $\forall x \in IR^+$ **on a** : $\left| \frac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5} \right| \leq \frac{1}{8}\left|x - \sqrt{5}\right|$
   b. **Soit** $n \in IN^*$,**Montrer que** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   c. **En déduire la valeur de** $E\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$
   d. **Calculer pour tout** $n \in IN^*$ $E\left(\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}\right)$