Série 4 : *Nombres Copmlexes*

Vendredi le 10 Octobre 2003

Exercice 1:

Trouver les racines cubiques de $(1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n$.

Exercice 2:

Montrer que :$\forall(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ on a : $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. *(Identité du parallélogramme)* .

Donner son interprétation géométrique .

Exercice 3:

Soit $(z, \theta) \in \mathbb{C}$ x $\mathbb{R}$ tel que $z^2 - 2zcos(\theta) + 1 = 0$.Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $z^{2n} - 2z^n cos(n\theta) + 1 = 0$.

Exercice 4:

Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}$ x $\mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :
$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$.$\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k \cos(k\theta)$. $\sum\limits_{k=0}^{E(\frac{n}{2}).} (-1)^k C_n^{2k}$.

Exercice 5:

Soient $(a, b) \in IR^2$, $n \in IN$.

1. Simplifier les sommes : $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(a+kb), S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$.
2. En déduire la valeur de : $cos(\frac{\pi}{11}) + cos(\frac{3\pi}{11}) + cos(\frac{5\pi}{11}) + cos(\frac{7\pi}{11}) + cos(\frac{9\pi}{11})$

Exercice 6:

Trouver une *CNS* sur les complexes a, b, c pour qu'ils soient les affixes des sommets :

1. D'un triangle rectangle isocèle .
2. D'un triangle équilatéral .

Exercice 7:

Trouver l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes

1. z, z^2, z^3 soient alignés .
2. z, z^2, z^3 soient sommets d'un triangle isocèle
3. 1, z, z^2, z^3 soient cocycliques.

Exercice 8:

Construction du polygone régulier a l'aide de la règle et du compas : On pose $w = e^{2i\frac{\pi}{5}}, a = w + w^4, b = w^2 + w^3$

1. Montrer que *1+a+b=0* en déduire que a et b sont les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
2. Donner a en fonction de $cos(\frac{2\pi}{5})$, puis en déduire la valeur de $cos(\frac{2\pi}{5})$
3. On note par $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ les points d'affixes $(w^i)_{1\leq i\leq 4}$ et H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe *(ox)* montrer que $\overline{OH} = \dfrac{a}{2}$
4. On note par M le point d'abscisse positive , point d'intersection de l'axe *(ox)* avec le cercle de centre *C (-* $\frac{1}{2}$*)* passant par *B(i)* montrer que $\overline{OM} = a$ et que H est le milieu de *[O , M]*
5. En déduire une construction du pentagone régulier a l'aide de la règle et le compas

---

Exercice 9:

Montrer que, pour tout nombre complexe z de module autre que 1 et tout entier naturel n, .on a : $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$

Exercice 10:

Ecrire sous forme algebrique $x+iy$ et trigonometrique $\rho e^{i\theta}$ le complexe $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2003}$.

Exercice 11:

Soit $z \in \mathbb{C}$ .Montrer que $|z| = 1 \Rightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 12:

Determiner tous les $z \in \mathbb{C}$ dont les racines cubiques z_1, z_2, z_3 verifient l'équation : $z_1 - z_2 = \frac{1}{z_3}$.

Exercice 13:

Soient *A(a)* , *B(b)* et *C(c)* trois point non alignés

1. Si on note par M le milieu de $[B, C]$ montrer que : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$ *(Théorème de la mediane)*
2. $\frac{|a-b|}{\sin(\hat{C})} = \frac{|b-c|}{\sin(\hat{A})} = \frac{|c-a|}{\sin(\hat{B})}$ *(loi des sinus)*

Exercice 14:

On considère quatre nombres réels *a, b, c et d* non nuls tels que b et d soient de même signe, et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Montrer que le rapport $\frac{az+b}{cz+d}$ est un nombre réel strictement positif, indépendant du choix d'un nombre complexe z tel que $cz+d$ soit non nul.

Exercice 15:

Soit *A(a) , B(b) et C(c)* trois points non alignes $\Omega(\omega)$le point intersection des médiatrices de $[A, B]$ et $[B, C]$

1. Exprimer ω en fonction de a *,* b *et* c
2. En déduire que Ω appartient a la 3 eme médiatrice et que c 'est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC
3. On note D_1 la droite parallèle a *(BC)* qui passe par A , D_2 celle parallèle a *(CA)* qui passe par B et D_3 celle parallèle a (AB) qui passe par C, $D_1 \cap D_2 = \{C1\}, D_1 \cap D_3 = \{B_1\}, D_3 \cap D_2 = \{A_1\}$ faire un dessin puis montrer que A est le milieu de $[B_1, C_1]$
4. En déduire que les hauteurs du triangle (ABC) se coupent en un point appelé orthocentre
5. Exprimer cet orthocentre en fonction de a, b, c

DS 2001-2002

Exercice 16:

*Equation Complexe d'un cercle :*Montrer que l'equation complexe de cercle $C(\Omega\,(\omega)\,, R)$ s'écrit sous la forme $z\overline{z} + \overline{A}z + A\overline{z} + \alpha = 0$ où $A \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, exprimer A et α en fonction de ω et R .

Exercice 17:

*Théoréme de l'angle au centre :*Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points distincts d'un cercle $C(\Omega\,(\omega)\,, R)$, montrer que $\widehat{B\Omega C} = 2\left(\widehat{BAC}\right)$.

Exercice 18:

Théoréme de l'arc capable :

Soient $A(a), B(b)$ deux points distincts , $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$, montrer que l'ensemble des *M(z)* tels que : $\widehat{AMB} \equiv \theta[\pi]$ est un arc de cercle d'extrimités A et B.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc