Série 4 : *Dénombrement*

Lundi 04 Octobre 2004

Exercice 1:

Lemme des tiroirs : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal $n+1$, $(E_1, E_2, ..., E_n)$ une partition de E. Montrer que $\exists i \in [|1, n|]$ tel que $card(E_i) \geq 2$

Si on dispose de n tiroirs et n+1 objets alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets

---

Exercice 2:

Paradoxe des anniversaire :

1. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n \leq p$. Quelle est la proportion des applications injectives de $[|1, n|]$ dans $[|1, p|]$?
2. En déduire la probabilté pour que deux personnes parmi n aient le même anniversaire.
3. Faire le calcul pour *n=45*. Que pensez vous ?

Exercice 3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, de combien de façon on peut faire asseoir n hommes et n femmes autour d'une table à $2n$ siéges ronde en repectant l'alternance homme-femme. Commencer d'abord par les cas simples $n = 1, n = 2, n = 3$ avant de géneraliser.

Exercice 4:

1. Dans un ensemble E a n éléments combien peut-on former de parties qui contiennent une partie fixe A ,elle formée par p éléments ?
2. Sur un ensemble E à n éléments combien peut-on définir de relations binaires ?
   Penser à la définition des relations binaires à l'aide des graphes .
3. Parmi ces relations binaires combien sont-elles reflexives ?
   Penser à la définition des relations binaires reflexives à l'aide des graphes et à utiliser la question (1) .
4. Combien peut-on trouver de couples *(A,B)* de parties de E telles que $A \subset B$?
5. Combien peut-on trouver de couples *(A,B)* de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$?

Exercice 5:

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Combien peut-on définir d'applications strictement croissantes de $[|1, n|]$ vers $[|1, n+p|]$?

Penser à caractériser de telles applications à l'aide de leurs images

---

Exercice 6:

Formule du binôme de Newton :

1. Quel est le coefficient de $x^6y^4z^5$ dans le dé veloppement de $(x+2y-3z)^{15}$?
2. En calculant de deux façons $((1+x)^n)^3$, démontrer que : $C_{3n}^n = \sum\limits_{p=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{n-p} C_n^p C_n^k C_n^{n-p-k}$.
3. Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$: $\sum\limits_{k=0}^{p} k C_n^{p-k} C_n^k = n C_{2n-1}^{p-1}$ puis en déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{n} k \left(C_n^k\right)^2$.
   Penser à utiliser $(1+x)^n$ *et sa derivée* .
4. En développant ou bien en dérivant $(1+x)^n$ calculer les sommes suivantes :
   $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$.

Exercice 7:

1. Montrer que : $\forall (n,m,p) \in \mathbb{N}^3$: $\sum\limits_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$ en fonction de n.

Exercice 8:

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{p+k}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$.

Exercice 9:

Nombre de surjections : Pour $n, p \in \mathbb{N}$, $S_{n,p}$ désigne le nombre de surjections de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$.

1. Que dire de $S_{n,p}$ si $p > n$?
2. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.
3. Combien d'applications de $[|1,n|]$ dans $[|1,2|]$ sont non-surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
4. Montrer : $S_{n,3} = 3^n - 3 - 3S_{n,2}$, et en déduire la valeur de $S_{n,3}$.
   On pourra commencer par chercher le nombres d'applications non surjectives de $[|1,n|]$ *dans* $[|1,3|]$.
5. Montrer que : $\sum\limits_{q=k}^{p} (-1)^k \mathcal{C}_p^q \mathcal{C}_q^k = 0$.
6. Montrer que : $S_{n,p} = p^n - \sum\limits_{k=1}^{p-1} \mathcal{C}_p^k S_{n,k}$.
7. En déduire que : $S_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} k^p \mathcal{C}_p^k$.
8. En déduire les valeurs des sommes suivantes : $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^n \mathcal{C}_n^k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^{n+1} \mathcal{C}_n^k$.
9. Pour p fixé, donner $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{S_{n,p}}{p^n}$, puis donner une intérpretation *probabilistique* au résultat trouvé.

Exercice 10:

Soient n, p deux entiers tels que : $0 \leq n \leq p$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k k^n \begin{array}{l} = 0 \text{ si } p < n \\ = (-1)^n n! \text{ si } p = n \end{array} .$$

Exercice 11:

Un *n-mot de Gauss* est un *2n-uplet* $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ formé par des éléments de $[|1, n|]$ où chaque élément de $[|1, n|]$ apparaît exactement 2 fois.

1. Trouver le nombre des *n-mot de Gauss* pour *n=1,n=2,n=3* .
2. Montrer que dans le cas général il y en a $\dfrac{(2n)!}{2^n}$.

Exercice 12:

Théorème des chapeaux : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note par D_n le nombre de bijections de $[|1, n|]$ dans lui même,sans point fixes,c-a-d $f(i) \neq i, \forall i \in [|1, n|]$. On les appelle les dérangements de $[|1, n|]$.Par convention $D_0 = 1$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$.
2. Soit $(k, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leq k < p$, montrer alors que : $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1) C_p^q C_q^k = 0$.
3. En déduire que : $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k!$.
4. (**) Démontrer que : $\frac{D_n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{e}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

   Intérprétation :Si n personnes déposent tous leurs chapeaux en entrant dans une salle puis en sortant chacun en prend un au hasard la probabilité pour qu'aucun ne reprend le chapeau qu'il a déposé a la rentrée tend vers $\dfrac{1}{e}$. Etonnant, non ?.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca