www.chez.com/myismail © 2002

MPSI 1

CPGE Agadir

Feuille d'exercice N° 5
Mercredi 09 - 10 -2002

Structures

1. **Soit** $(E,.)$ **un magma tel que** : $\forall x \in E$ **on a** $x.x = x$ **et** $\forall (x,y,z) \in E^3$ **on a** $(x.y).z = (y.z).x$ **Montrer que . est commutative .**
2. a. **Soit** E **ensemble fini non vide muni d'une** LCI **associative et commutative , dont tous les éléments sont réguliers , montrer qu ' il s'agit d'un groupe**
   b. **2. même question on supposant cette fois que la** LCI **est seulement associative .**
3. a. **Soit** E **ensemble fini non vide muni d'une** LCI **associative et commutative vérifiant la propriété suivante** : $\forall (x,y) \in E^2 \exists a \in E$ **tel que** : $y = a.x$
   b. **même question on supposant cette fois que la** LCI **est seulement associative .**
4. **Soit** $(E,.)$ **un magma , pour toute partie** A **de** E **on pose** :
   $c(A) = \{x \in E \,/\, a.x = x.a \ \forall a \in A\}$ **appele** *centre* **de** A, **montrer les propriétés suivantes** :
   a. $\forall A \in P(E)$ **on a** : $A \subset c(c(A))$.
   b. $\forall\ (A,B) \in P(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow c(B) \subset c(A)$.
   c. $\forall A \in P(E)\ c(A) = c(c(c(A)))$.
   d. E **groupe** $\Rightarrow c(E)$ **groupe** .
5. **Soit** $(G,.)$ **un groupe** , $(a,b,c) \in G^3$ **fixes et** e **neutre pour . ; montrer les résultats suivants** :
   a. $a^5 = b^4 = e$) **et** ($ab = ba^3$) $\Rightarrow$($a^2b = ba$) **et** ($ab^3 = b^3a^2$)
   b. $(b^6 = e$) **et** ($ab = ba^4$) $\Rightarrow$ ($b^3 = e$) **et** $(ab = ba)$.
   c. $(a^5 = a^{-1}b$ **et** $aba^{-1} = b^2$] $\Rightarrow b^{31} = e]$
   d. $(ab)^{-1} = a^{-1}b$ **et** $(ba)^{-1} = b^{-1}a$] $\Rightarrow [a^2 = b^2$ **et** $a^2b^2 = e]$
   e. $a^{-1}ba = b^{-1}$ **et** $b^{-1}ab = a^{-1}] \Rightarrow [a^4 = b^4 = e]$
   f. $(aba) = b^3$ **et** $b^5 = e$] $\Rightarrow [ab = ba$ **et** $a^2 = b^2]$
6. **Sur** $IR * xIR$ **on définit la** LCI **suivante** : $(a,b) * (c,d) = (ac, (\frac{d}{a}) + bc)$
   a. **montrer que ça définit une structure de groupe**
   b. **s'agit-il d'un groupe abelien**?
7. **Soit** G **un groupe , pour tout** $a \in G$, **pour toutes parties** H **et** K **de** G **on pose** :
   - aH **l'ensemble des éléments de** G **qui s'écrivent sous la forme** $a.x$ **où** $x \in H$
   - Ha **l'ensemble des éléments de** G **qui s'écrivent sous la forme** $x.a$ **où x** $\in H$
   - HK **l'ensemble des éléments de** G **qui s'écrivent sous la forme** $x.y$ **où** $(x,y) \in HxK$

   a. **soit** $a \in G$ **et** H **sous groupe de** G **montrer que** : aH **sous groupe de** $G \Leftrightarrow a \in H$
   b. **soit** $a \in G$ **et** H **sous groupe de** G **montrer que** : Ha **sous groupe de** $G \Leftrightarrow a \in H$
   c. **soient** H **et** K **deux sous groupes de** G **montrer que** : HK **sous groupe de**

$G \Leftrightarrow HK = KH$

8. **Soit**$(G,+)$ **un groupe abélien** .
   a. **montrer que** : $\forall(m,n) \in IN^2\ \forall s \in Z\ \ \forall(x,x_n,x_{n+1},,x_{n+m}) \in G^{m+1}$ **on a** :
   $$\sum_{i=n}^{n+m}(sx_i + x) = s\sum_{i=n}^{n+m}x_i + (m+1)x$$
   b. **en déduire que** : $\forall(m,n) \in IN^2\ \forall x \in G$ **on a** : $\sum_{i=n}^{n+m}(2i+x) = (m+1)(2n+m+1)x$
   c. **en déduire que** : $\forall m \in IN\ \ m^2$ **est la somme des** m **premiers nombres impairs**
   "Théorème de THEON DE SMYRNE, mathématicien grec"
9. **Soit** $(A,+,.)$**un anneau tel que** $x^2 = x\ \forall x \in A$, **montrer alors que** : $\forall x \in A\ 2x = 0_A$ **en déduire ensuite que** A **est commutatif** .
10. **Soit** $(A,+,.)$ **un anneau commutatif on dit qu'un élément** x **de**A **est nilpotent si** : $\exists n \in IN$ **/** $\mathbf{x}^n = \mathbf{0}_A$, **montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents sont aussi nilpotents**.
11. **Soit**$(A,+,.)$ **un anneau commutatif** ;$\forall(x,n) \in AxIN$ **on pose**
    $x^{(0)} = 1_A, x^{(1)} = x, x^{(2)} = x(x-1_A).., x^{(n)} = x(x-1_A)(x-(n-1)1_A)$, **montrer que** :
    $\forall(x,y) \in AxA$ **on a** :$(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(n-k)} y^{(k)}$