MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°6

Mercredi le:16-10-2002

Arithmetque

1. Montrer les propriétés suivantes :
- **a**. $\forall(a,b,c) \in IN^3$: (9 divise $a^3+b^3+c^3$) ⇒ (3 divise a ou b ou c)
- **b**. $\forall(a,b,c) \in IN^3$: (7 divise a ^{3} + b ^{3}+ c ^{3}) ⇒ (7divise abc)
- **c**. $\forall n \in IN$ on a : 6 divise $5n^3+n$
- **d**. $\forall n \in IN$ on a : 7 divise $32^{n+1}+2^{n+2}$
- **e**. $\forall n \in IN$ on a : 9 divise $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

2. *Nombres de Fermat* (mathématicien *français* : $1601-1665$)
Les nombres de *Fermat* sont ceux de la forme : $F_n = 2^{2^n}+1$
- **a**. montrer que tous ces nombres sont premiers entre eux deux a deux
- **b**. montrer que F_n est premier pour$n \in [|0,4|]$ mais F_5 ne l ' est pas
- **c**. soit $a \in IN^*$ montrer que si 2^a+1 est premier alors $a$est une puissance de 2
  A l'heure actuelle on ne connaît aucun nombre de *Fermat* premier autre que ceux de (b) mais on connaît plusieurs qui ne le sont pas : F_{1945}(qui a plus de 10582 chiffres) est divisible par $2^{1947}5+1$(qui a exactement 587 chiffres)

3. critère *d'Eseinstein*
- **a**. Montrer que si $\frac{p}{q} \in Q$ est solution de l'équation : $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+.+a_0 = 0$ avec $p \wedge q = 1$et $(ai)_{0\leq i\leq n} \in IN^{n+1}$ alors : p divise $a_0$et q divise a_n
- **b**. résoudre l'équation : $30X^3-37X^2+15X-2$

4. Donner le chiffres des unités de 4444^{4444} ,On pourra travailler dans $Z/10Z$.

5. On pose $N = 4444^{4444}$, A la somme des chiffres de N , B celle de A et C celle de B , trouver C.(On pourra utiliser aprés l'avoir justifié qu'un nombre et la somme de ses chiffres sont toujours *congrus modulo* 3 et 9)

6. Soit $N = 111111111$, écrit en base 10 , démontrer que : $N^2 = 12345678987654321$
- **a**. Nous sommes le mercredi $16-10-2002$, l'année prochaine quel jour sera le $16-10-2003$?
- **b**. Dans quelle année le $16-10$ sera un mercredi ?

7. crible d'*Eratosthène*
- **a**. Montrer que tout entier supérieur a 2 non premier admet au moins un diviseur premier inférieur a sa racine
- **b**. Les nombres premiers suivants sont - ils premiers : 353 , 91451

8. Théorème de *Wilson*
Montrer que si p est premier alors :$(p-1)! \equiv -1(modp)$

9. Déterminer le sous-ensemble E de IN constitué des entiers n tels que :
- **a**. 4 divise n.
- **b**. n admet 10 diviseurs dans IN.
- **c**. il existe un nombre premier p tel que $n = 37p+1$.

10. Trouver tous les chiffres x et y pour que le nombre $\overline{28x75y}^{10}$ soit divisible par 3 et par 11.

11. Soit p un nombre premier.

a. Montrer que $p/C_p^k\ \forall k \in [|1,p-1|]$.

b. Montrer par récurrence que: $\forall n \in IN\ n^p \equiv n\ [p]$ (*Petit Théorème de Fermat*)

12. Soit $(a,b) \in IN^{*2}$ montrer que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a+b) = 1$.

13. Resoudre dans IN^* le systéme suivant : $\begin{cases} x \geq y \\ x \vee y = (x \wedge y)^2 \\ x \vee y + x \wedge y = 156 \end{cases}$

14. On pose $x = 3n+1, y = 5n-1$.

15. Montrer que $x \wedge y$ divise 8.

16. Trouver les entiers n tels que $x \wedge y = 8$.

17. Montrer que 2^n divise $\left(3+\sqrt{5}\right)^n - \left(3-\sqrt{5}\right)^n\ \forall n \in IN$

18. Soient $a \in IN$, $a \geq 2$ et $(m,n) \in IN^{*2}$ tel que :$m \geq n$.

19. On pose $m = qn + r$ avec $0 \leq r < n$

a. montrer que : $\exists b \in IN$; $a^m - 1 = (a^n-1)b + a^r - 1$.

b. Montrer que : $(a^m-1) \wedge (a^n-1) = a^{m \wedge n} - 1$.

c. Montrer que : (a^n-1) divise $(a^m-1) \Leftrightarrow n$ divise m

20. Soit N_k le nombre qui s'écrit avec k chiffres 1 en base 10, montrer que : $N_h/N_k \Leftrightarrow h/k$.

21. *Nombres de Mersenne*: ils sont de la forme : $M_p = 2^p - 1$ avec p premier.

a. Montrer que les *Nombres de Mersenne* sont premiers entre eux deux a deux

b. Soit $(a,b) \in IN^{*2}$ tel que : $a^b - 1$ est premier ,montrer alors que : $a = 2$ et b premier

22. *Controle* 2 (2001-2002):

Pour tout entier n on note par $D(n)$ l'ensemble de ses diviseurs dans IN et $\varphi(n) = \sum_{d/n} d$

Soit $(m,n) \in IN^{*2}$

a. montrer que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow D(nm) = D(n)\mathrm{x}D(m)$

b. En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

23. *DS* 2 (99-2000).

On rapelle que si $n \geq 2$ et p premier $v_p(n)$ désigne la puissance de p dans la décomposition de n en produits de facteurs premiers

a. Montrer que $\forall i \in IN\ p^i$ divise $n \Longrightarrow i \leq v_p(n)$

b. Montrer que $\forall (i,j) \in IN^2\ p^{i+j} \leq n \Longrightarrow E\left(\frac{1}{p^j}E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right)$

c. On pose $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$, montrer que : $v_p(n!) = m + v_p(m!)$

d. *Applications* :

i. Calculer $v_7(10000!)$

ii. Decompose 16! en produits de facteurs premiers.

iii. Monter qu'en base 10 , 1000! se termine par 249 zeros.