Série 6 : *Suites réelles*

Jeudi 28 Octobre 2004

Exercice 1:

Soit x réel fixe. Etudier les limites des suites de terme général : $\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{E(kx)}{n^2}\right)$.

Exercice 2:

Donner la limite de $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{k}{n^2})$ quand $n \longrightarrow +\infty$. On pourra utiliser l'inégalité : $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$ ainsi que les valeurs des sommes : $\sum\limits_{k=1}^{n} k; \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 3:

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt[n]{n!}$.

1. Montrer que : $\ln(u_n) = \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln(k)}{n}$.
2. Soit k un entier, $k \geq 2$. Démontrer l'encadrement : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x\, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x\, dx$.
3. En déduire un encadrement de $\ln u_n$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Étudier le signe de v_n. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 4:

Soit $((u_n),(v_n)) \in ([0,1^{\mathbb{N}})^2$ tel que $(u_n v_n)$ converge vers 1 , montrer que $(u_n),(v_n)$ convergent aussi vers 1 .

Exercice 5:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

1. Par récurrence, montrer que $\quad \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq \sqrt{n-1}+\sqrt{n}$.
2. Par récurrence, montrer que $\quad \in \mathbb{N}^* \quad S_n \geq 2\sqrt{n+1}-2$.
3. La suite (S_n) est-elle convergente ?
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6:

Soient a, b deux réels positifs fixes. Trouver toutes les suites rélles vérifiant :

1. $u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
2. $u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Exercice 7:

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .Montrer que :

1. $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ convergent vers la mémme limite $\Longrightarrow$ (u_n) converge .
2. $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent $\Longrightarrow$ (u_n) converge .

Exercice 8:

Soit (u_n) une suite monotone qui admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente, montrer que (u_n) est aussi convergente .

Exercice 9:

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente et L sa limite on suppose que $L \notin \mathbb{N}$

1. Montrer que $E(L) < x_n < E(L) + 1$ a partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(E(x_n))$converge vers $E(L)$

Exercice 10:

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(m) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{nm} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge , soit $L(m)$ sa limite
2. Monter que $L(pq) = L(p) + L(q)\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$

Exercice 11:

On pose $u_n = cos(n), v_n = sin(n)$

1. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n
2. Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0
3. conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger

Exercice 12:

$$(a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2, a < b, u_0 = a, u_1 = b, u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

1. Montrer $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ que suites sont adjacentes.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$, en deduire $\lim u_n$.

Exercice 13:

1. *Trissection de l'angle* : Soit $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

2. On pose : $u_0 = 0, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n^3 + \sin(\theta))$. Montrer que (u_n) est croissante majorée, preciser sa limite.

3. Expliquer l'origine de l'appelation *Trissection de l'angle*. Donner les 3 premières valeurs approchées de $\sin \frac{\pi}{18}$.

Exercice 14:

Moyenne arithmico-géometrique : Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose : $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

1. Montrer que ces suites sont bien définies.
2. Montrer qu'elles sont adjacentes , on note par $M(a,b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b.
3. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|a_n^2 - b_n^2\right| \leq 16b^2 \left(\frac{b^2-a^2}{16b^2}\right)^{2^n}$.
4. Donner une majoration de $a_n - M(a,b)$ et $M(a,b) - b_n$ en fonction de a, b, n
5. En déduire une valeur approche par défaut et une par excès de $M(2,1)$ à 10^{-5}*près*

Exercice 15:

Calcul approche de π à l'aide de la methode *des isopêrimétres.*

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose : $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$. Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.
2. Exprimer leurs limites communes en fonction de $\theta = \arccos(\frac{a}{b})$. *On pourra d'abord commencer par exprimer les a_n, b_n en fonction de θ.*
3. soit $n \in \mathbb{N}$, et P_n le polygone régulier à 2^n côtés et de périmètre 2, soit r_n le rayon du cercle inscrit et R_n celui du cercle circonscrit à P_n, montrer que $\forall n \geq 2$ on a :
   $r_{n+1} = \frac{r_n+R_n}{2}, R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1}R_n}$.
4. En déduire qu'elle sont adjacentes puis en remarquant que $\dfrac{1}{R_n} \leq \pi \leq \dfrac{1}{r_n}$ en déduire que $\dfrac{1}{R_n}, \dfrac{1}{r_n}$ convergent vers π.

Exercice 16:

Calcul approché de π à l'aide de la méthode de *Viete.*

1. Soit$0 < \theta < \pi$ tel que $\sin(\frac{\theta}{2^n}) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, montrer que les suites $(2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}))$ et $(2^n \tan(\frac{\theta}{2^n}))$ sont adjacentes, calculer leurs limites communes.
2. Soit $((u_n),(v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ définies par : $u_0 = \sqrt{2}, v_0 = 4, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, v_{n+1} = 2v_n$, montrer que $v_n\sqrt{2-u_n} \to \pi$. *On pourra utiliser la relation :* $1 + \cos 2\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}$.

Exercice 17:

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

1. Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.

2. Calculer leurs limites communes.

Exercice 18:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on pose } I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ en déduire la limite de I_n.
2. A l'aide d'une intégration par parties établir que : $(n+1)I_n = e^{-1} + I_{n+1}$.
3. En déduire un équivalent simple de I_n.

Exercice 19:

Montrer les resultats suivants :

1. $E(n\sqrt{n+1}) + E(n\sqrt{n}) \sim 2n\sqrt{n}$.
2. $u_n \sim \frac{ln(n)}{ln(10)}$ où $u_n =$ le nombre de chiffres dans l'ecriture de n en base 10.
3. $\frac{2^n+n^2-3}{2^n+3^n-n^{2004}} \sim (\frac{2}{3})^n$.
4. $C_{2n}^n = o(a^n)$ si $a > 4$.
5. $a^n = o(C_{2n}^n)$ si $0 < a < 4$.

Exercice 20:

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ definie par : $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$

1. Exprimer $\frac{1+u_n}{1-u_n}$ puis u_n en fonction de n .
2. En deduire un equivalent simple de u_n.

Exercice 21:

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad , l \in \mathbb{R}$,on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \quad , w_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} u_i} \quad si \quad u_i > 0, \forall i$

1. Montrer que $u_n \longrightarrow l \Longrightarrow v_n \longrightarrow l \quad , w_n \longrightarrow l$ *Théoréme de Césaro.*
2. A l'aide d'une contre exemple montrer que la réciproque est fausse
3. Montrer en revanche que : $u_n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \to +\infty$.

Exercice 22:

1. *Recherche d'equivalent simple :* Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang telle que $u_n \to 0$ si on peut trouver un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tels que $u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha \to \beta$. Montrer alors que : $\dfrac{u_n^\alpha - u_0^\alpha}{n} \to \beta$.
   Indication : On pourra utiliser le théorème de Cesaro.
2. En déduire alors que : $u_n \sim (n\beta)^{\frac{1}{\alpha}}$.
3. Application : Donner un équivalent simple des suivantes definies par $u_0 = a \in]0, 1[$ et :
   (a) $u_n = \ln(1 + u_{n-1})$ (Indication : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour $x > 0$).
   (b) $u_n = \sin(u_{n-1})$ (Indication : $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$ pour $x > 0$)

Exercice 23:

On pose pout tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$ *Integrales de Wallis* et on se propose démontrer le résultat suivant : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *formule de Stirling :*

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. Calculer I_{2n} et I_{2n+1}.
3. Montrer que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en déduire que : $I_n \sim In + 1$.
4. Calculer le produit $I_{2n}I_{2n+1}$, en déduire un équivalent simple de I_{2n}, I_{2n+1} puis celui de I_n.
5. On pose pout tout $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$, montrer que $\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \sim \frac{1}{4n^2}$. *On pourra l'utiliser sans le démontrer le résultat suivant :* $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \epsilon_n$ avec $\epsilon_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
6. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$: $\frac{1}{5n^2} \leq \ln\left(\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.
7. Montrer que la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée.
8. En deduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)$ est croissante majorée, donc converge. Conclure que α_n converge, on notera α sa limite sans chercher à la calculer.
9. Exprimer $\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ en fonction de n et I_{2n}.
10. En deduire α puis que : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$: *formule de Stirling :*
11. En deduire $\lim\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca