MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°7

Mercredi le:23-Octobre-2002

Nombres Complexes

1. Trouver les racines cubiques de $(1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n$
2. Montrer que :$\forall (z_1,z_2) \in C^2$ on a : $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ (*Identité du parallélogramme*) donner son interprétation géométrique
3. Soit (z,θ)$\in$C x IR tel que z^2 - 2zcos(θ) + 1 = 0 montrer que $\forall n \in IN$ on a : $z^{2n} - 2z^n cos(n\theta) + 1 = 0$
4. Soit $(n,\theta) \in INxIR$, simplifier les expressions suivantes :
   a. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$
   b. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k \cos(k\theta)$
   c. $\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k}$
5. Soient $(a,b) \in IR^2$, $n \in IN$.
   a. Simplifier les sommes: $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb), S_1 = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb),$
   b. En déduire la valeur de : $cos(\frac{\pi}{11}) + cos(\frac{3\pi}{11}) + cos(\frac{5\pi}{11}) + cos(\frac{7\pi}{11}) + cos(\frac{9\pi}{11})$
6. Trouver une *CNS* sur les complexes *a*, *b*, *c* soient les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle
7. Trouver une *CNS* sur les complexes *a*, *b*, *c* soient les affixes des sommets d'un triangle équilatéral
8. Trouver l'ensemble des complexes *z* tel que les points d'affixes z, z^2, z^3 soient alignés
9. Trouver l'ensemble des complexes *z* tel que les points d'affixes z, z^2, z^3 soient sommets d'un triangle isocèle
10. Trouver l'ensemble des complexes *z* tel que les points d'affixes 1, z, z^2, z^3 soient cocycliques.
11. *Construction du polygone régulier a l'aide de la règle et du compas* :
    On pose $w = e^{2i\frac{\pi}{5}}, a = w + w^4, b = w^2 + w^3$
    a. Montrer que 1+*a*+*b*=0 en déduire que *a* et *b* sont les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
    b. Donner *a* en fonction de $cos(\frac{2\pi}{5})$, puis en déduire la valeur de $cos(\frac{2\pi}{5})$
    c. On note par $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$ les points d'affixes $(w^i)_{1 \leq i \leq 4}$ et *H* le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe (ox) montrer que $\overline{OH} = a$
    d. On note par *M* le point d'abscisse positive , point d'intersection de l'axe (*ox*) avec le cercle de centre *C* (- ½) passant par *B*(*i*) montrer que $\overline{OM} = a$ et que *H* est le milieu de [*O* , *M*]
    e. En déduire une construction du pentagone régulier a l'aide de la règle et le compas
12. Montrer que, pour tout nombre complexe *z* de module autre que 1 et tout entier naturel *n*, .on a : $\left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$

13. Ecrire sous forme algebrique ($x+iy$) et trigonometrique $\rho e^{i\theta}$ le complexe $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2002}$

14. Soit $z \in C$, montrer que $|z| = 1 \Rightarrow \frac{1+z}{1-z} \in iIR$

15. Determiner tous les $z \in C$ dont les racines cubiques verifient l'équation : $z_1 - z_2 = \frac{1}{z_3}$.

16. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois point non alignés

- **a**. Si on note par M le milieu de $[B,C]$ montrer que : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$ (*Théorème de la mediane*)
- **b**. $\frac{|a-b|}{\sin(\hat{C})} = \frac{|b-c|}{\sin(\hat{A})} = \frac{|c-a|}{\sin(\hat{B})}$ (*loi des sinus*)

17. On considère quatre nombres réels a, b, c *et* d non nuls tels que b et d soient de même signe, et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Montrer que le rapport $\frac{az+b}{cz+d}$ est un nombre réel strictement positif, indépendant du choix d'un nombre complexe z tel que $cz+d$ soit non nul.

18. *DS* 2 (2000-2001)

Soit $A(a)$, $B(b)$ *et* $C(c)$ trois points non alignes $\Omega(\omega)$le point intersection des médiatrices de $[A,B]$ et $[B,C]$

- **a**. Exprimer ω en fonction de a , b *et* c
- **b**. En déduire que Ω appartient a la 3 eme médiatrice et que c 'est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC
- **c**. On note D_1 la droite parallèle a (BC) qui passe par A , D_2 celle parallèle a (CA) qui passe par B et D_3 celle parallèle a (AB)qui passe par C,
  $D_1 \cap D_2 = \{C1\}, D_1 \cap D_3 = \{B_1\}, D_3 \cap D_2 = \{A_1\}$ faire un dessin puis montrer que A est le milieu de$[B_1, C_1]$
- **d**. En déduire que les hauteurs du triangle (ABC)se coupent en un point appelé orthocentre
- **e**. Exprimer cet orthocentre en fonction de a, b, c

19. *Equation Complexe d'un cercle*.

Montrer que l'equation complexe de cercle $\wp(\Omega(\omega), R)$ s'écrit sous la forme $z\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + \alpha = 0$ où $A \in C$ et $\alpha \in IR$., exprimer A et α en fonction de ω et R.

20. *Théoréme de l'angle au centre*:

Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points distincts d'un cercle $\wp(\Omega(\omega), R)$, montrer que $B\hat{\Omega}C = 2\left(B\hat{A}C\right)$

21. *Théoréme de l'arc capable*:

Soient $A(a), B(b)$ deux points distincts , $\theta \in IR^*$, montrer que $\left\{M(z)/\ A\hat{M}B \equiv \theta\ [\pi]\right\}$ est un arc de cercle d'extrimités A et B.