Série 7 : *Suites Réelles*

Mercredi le 19 Novembre 2003

Exercice 1:

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt[n]{n!}\ .$$

1. Montrer que : $ln(u_n) = \dfrac{\sum_{k=2}^{n} ln(k)}{n}$.
2. Soit k un entier, $k \geq 2$. Démontrer l'encadrement
$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x \, dx\ .$$
3. En déduire un encadrement de $\ln u_n$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Étudier le signe de v_n.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 2:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

1. Par récurrence, montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.
2. Par récurrence, montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$.
3. La suite (S_n) est-elle convergente ?
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

DS 2003-2004

Exercice 3:

Montrer que $\forall x \geqslant 0$ on a : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant ln(1+x) \leqslant x$ .En déduire la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Exercice 4:

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence $x_0 = x$,

- Si x_n existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\frac{1}{k_n} \leq x_n$. On pose $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_n}$,
- Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas, $x = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$.

1. Montrer que la suite est toujours finie.
2. Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.
3. Réciproquement, soit une décomposition : $x = \frac{1}{n_0} + \cdots + \frac{1}{n_p}$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.

Décomposition d'un rationnel en inverses

Exercice 5:

1. Résoudre $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n), u_0 = a, \ u_1 = b.$.
2. Résoudre : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$.

Exercice 6:

Soit (u_n) une suite de réels. On définit les suites dérivées de (u_n) :

$$(u'_n) = (u_{n+1} - u_n), \quad (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n) \quad .... \left(u_n^{(k+1)}\right) = \left(u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}\right).$$

1. Exprimer $u_n^{(k)}$ en fonction de $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est polynomiale si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(u_n^{(k)}\right) = (0)$.

Exercice 7:

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .Montrer que :

1. $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ convergent vers la mémme limite $\Longrightarrow (u_n)$ converge .
2. $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent $\Longrightarrow (u_n)$ converge .

Exercice 8:

Soit (u_n) une suite monotone qui admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente , montrer que (u_n) est aussi convergente .

Exercice 9:

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $, l \in \mathbb{R}$,on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ $, w_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} u_i}$ *si* $u_i > 0, \forall i$

1. Montrer que $u_n \longrightarrow l \Longrightarrow v_n \longrightarrow l \quad , w_n \longrightarrow l$ *Théoréme de Césaro* .
2. L'implication precedente est-elle encore vraie si $u_n \longrightarrow \infty$
3. *Application* :determiner les limites des suites suivantes :$u_n = \sqrt[n]{C_{2n}^n} \quad , u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} \quad , u_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$

Exercice 10:

Etudier les limites des suites de terme général :

1. $\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)$ où x réel fixe
2. $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{E(kx)}{n^2}\right)$où x réel fixe

---

Exercice 11:

Montrer que la suite de terme général $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ diverge vers $+\infty$

Exercice 12:

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ montrer que : $\dfrac{u_n}{1+u_n} \to 0 \Longleftrightarrow u_n \to 0$

Exercice 13:

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente et L sa limite on suppose que $L \notin IN$

1. Montrer que $E(L) < x_n < E(L) + 1$ a partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(E(x_n))$converge vers $E(L)$

Exercice 14:

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(m) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{nm} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge , soit $L(m)$ sa limite
2. Monter que $L(pq) = L(p) + L(q)\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$

Exercice 15:

On pose $u_n = cos(n), v_n = sin(n)$

1. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n
2. Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0
3. conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger

Exercice 16:

Soit $((u_n),(v_n)) \in ([0,1^{\mathbb{N}})^2$ tel que (u_nv_n) converge vers 1 , montrer que $(u_n),(v_n)$ convergent aussi vers 1 .

Exercice 17:

Montrer les resultats suivants :

1. $E(n\sqrt{n+1}) + E(n\sqrt{n}) \sim 2n\sqrt{n}$
2. $u_n \sim \dfrac{ln(n)}{ln(10)}$ où $u_n =$ le nombre de chiffres dans l'ecriture de n en base 10
3. $\dfrac{2^n + n^2 - 3}{2^n + 3^n - n^{2002}} \sim (\dfrac{2}{3})^n$
4. $C_{2n}^n = o(a^n)$ si $a > 4$
5. $a^n = o(C_{2n}^n)$ si $0 < a < 4$

Exercice 18:

Recherche d'equivalent simple

1. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ a partir d'un certain rang telle que $u_n \to 0$ et $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha} \to \beta$ montrer alors que : $u_n \sim (\dfrac{1}{n\beta})^{\frac{1}{\alpha}}$(Indication : On pourra utiliser la moyenne de Cesaro)
2. Application : Donner un equivalent simple des suivantes definies par $u_0 = a \in]0,1[$ et :
   (a) $u_{n+1} = ln(1+u_n)$ (Indication : $x - \dfrac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$ pour $x > 0$)
   (b) $u_{n+1} = sin(u_n)$ (Indication : $x - \dfrac{x^3}{6} < sin(x) < x$ pour $x > 0$)

Exercice 19:

On pose pout tout $n \in IN$ $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$ *Integrales de Wallis* et on se propose démontrer le résultat suivant : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *formule de Stirling :*

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}
2. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} .
3. Montrer que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en déduire que : $I_n \backsim In+1$.
4. Calculer le produit $I_{2n}I_{2n+1}$, en déduire un équivalent simple de I_{2n} .
5. On pose pout tout $n \in IN$ $\alpha_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$, montrer que $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \backsim -\dfrac{1}{12n^2}$.
   On pourra l'utiliser sans le démontrer le résultat suivant : $\ln(1+\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \varepsilon_n$ *avec* ε_n *une suite négligeable devant* $\frac{1}{n^2}$.
6. En deduire que α_n converge , on notera α sa limite sans chercher à la calculer .
7. Exprimer $\dfrac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ en fonction de n et I_{2n}
8. En deduire α puis que : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *formule de Stirling :*

9. En deduire $\lim \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$

Exercice 20:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on pose } I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ en déduire la limite de I_n
2. A l'aide d'une intégration par parties établir que : $(n+1)I_n = e^{-1} + I_{n+1}$
3. En déduire un équivalent simple de I_n

DS 2000-2001

Exercice 21:

Moyenne arithmico-géometrique :Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$,
on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

1. Montrer que ces suites sont bien définies
2. Montrer qu'elles sont adjacentes , on note par $M(a,b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b
3. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|a_n^2 - b_n^2\right| \leq \frac{1}{4b^2}\left(\frac{b-a}{4b^2}\right)^{2^n}$
4. Donner une majoration de $a_n - M(a,b)$ et $M(a,b) - b_n$ en fonction de a, b, n
5. En déduire une valeur approche par défaut et une par excès de $M(2,1)$ a 10^{-5}*près*

DS 99-2000

Exercice 22:

Calcul approche de π à l'aide de la methode *des isopêrimétres*

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose
$$a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$
.Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes
2. Exprimer leurs limites communes en fonction de $\theta = arccos(\frac{a}{b})$.
3. soit $n \in \mathbb{N}$,P_n le polygone régulier a 2^n côtés et de périmètre 2 , soir r_n le rayon du cercle inscrit et R_n celui du cercle circonscrit a P_n , montrer que $\forall n \geq 2$ on a :
$$r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2}, R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1} R_n}$$
4. En déduire qu'elle sont adjacentes puis en remarquant que $\frac{1}{R_n} \leq \pi \leq \frac{1}{r_n}$ en déduire que $\frac{1}{R_n}, \frac{1}{r_n}$ convergent vers π.

DS 98-99

Exercice 23:

Calcul approche de π à l'aide de la methode de *Viete*

1. Soit$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, montrer que les suites $(2^n sin(\dfrac{\theta}{2^n}))$ et $(2^n \tan(\dfrac{\theta}{2^n}))$ sont adjacentes , calculer leurs limites communes
2. Soit $((u_n),(v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ définies par : $u_0 = \sqrt{2}, v_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, v_{n+1} = 2v_n$, montrer que $v_n\sqrt{2-u_n} \to \pi$

Exercice 24:

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$

1. Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.
2. Calculer leurs limites communes.

Exercice 25:

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ definie par : $u_0 = 2, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2}$

1. Exprimer $\dfrac{1+u_n}{1-u_n}$ puis u_n en fonction de n .
2. En deduire un equivalent simple de u_n.

Exercice 26:

1. Soit $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ .Exprimer $sin(3\theta)$ en fonction de $sin(\theta)$
2. On pose : $u_0 = sin(\theta), u_{n+1} = u_n + \dfrac{4}{27}u_{n+1}^3$. Montrer que (u_n) converge et preciser sa limite.

Trissection de l'angle

Exercice 27:

$$(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2, a < b, u_0 = a, u_1 = b, u_{n+1} = \frac{u_n+u_{n-1}}{2}$$

1. Montrer $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ que suites sont adjacentes.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$, en deduire $\lim u_n$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc