MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°8

Mercredi le:30-Octobre-2002

Groupes Cycliques

1. Soit G un groupe abélien , (a,b)∈G^2 d'ordres finis dans G, on pose $o(a) = n$ et $o(b) = m$
   - **a**. Montrer que : a^{-1} est d'ordre fini avec $o(a^{-1)} = n$
   - **b**. Montrer queab est d'ordre fini avec $o(ab)$divisenm
   - **c**. Montrer que si de plus $n \wedge m = 1$ alors $o(ab) = nm$
   - **d**. Soit $p \in IN*$, montrer que a^p est d'ordre fini avec $o(a^p) = \frac{n}{n \wedge p}$
2. Soit G un groupe abélien fini de cardinal n et $a \in G$ fixe montrer que a est d'ordre fini et que $o(a)$ divise $Card(G)$ (Indication : On pourra multiplier les éléments de G entre eux puis ceux de aG en utilisant l'égalité $aG = G$)
   - **a**. Montrer que tout sous groupe H d'un sous groupe cyclique engendre par a est aussi cyclique(Indication : On pourra s'intéresser a la plus petite puissance de a qui appartient à H)
   - **b**. Montrer aussi que $Card(H)$ divise $Card(G)$.
   - **c**. Montrer que tout sous groupe fini de cardinal premier est cyclique.
3. Montrer que les permutations a supports deux a deux disjoints commutent entre elles
4. Soit $s = (125)(324)$ calculer s^{2000}
   - **a**. Montrer que toute permutation s'ecrit produit de transpostions.
   - **b**. Decompser $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ en produit de transpostions.
5. Soit $(i,j,k,l) \in IN^{*4}$ deux a deux distincts
   - **a**. Montrer que $(i\ j)(k\ l)$ et $(i\ j)(j\ l)$ sont produit de 3-cycles
   - **b**. En deduire que toute permutation impaire s'ecrit produit de 3-cycles