Série 8 : *Nombres complexes*

Lundi 29 Novembre 2004

Exercice 1:

1. Trouver les racines cubiques de $(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n$.
2. Ecrire sous forme algebrique $x+iy$ et trigonometrique $\rho e^{i\theta}$ le complexe $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2004}$.
3. Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $|z|=1\Rightarrow\frac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R}$.

Exercice 2:

Montrer que :$\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ on a : $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. *(Identité du parallélogramme)* . Donner son interprétation géométrique.

Exercice 3:

Soit $(z,\theta)\in\mathbb{C}$ x $\mathbb{R}$ tel que $z^2-2z\cos(\theta)+1=0$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $z^{2n}-2z^n\cos(n\theta)+1=0$.

Exercice 4:

Soit $(n,\theta)\in\mathbb{N}$ x $\mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :
$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\cos(k\theta)$.$\sum\limits_{k=0}^{n}kC_n^k\cos(k\theta)$. $\sum\limits_{k=0}^{E(\frac{n}{2}).}(-1)^kC_n^{2k}$.

Exercice 5:

1. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}$. Simplifier les sommes : $S_1=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(a+kb), S_1=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$.
2. En déduire la valeur de : $cos(\frac{\pi}{11})+cos(\frac{3\pi}{11})+cos(\frac{5\pi}{11})+cos(\frac{7\pi}{11})+cos(\frac{9\pi}{11})$

Exercice 6:

Trouver une *CNS* sur les complexes *a, b, c* pour qu'ils soient les affixes des sommets :
1.D'un triangle rectangle isocèle. 2. D'un triangle équilatéral.

Exercice 7:

Trouver l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes

1. z,z^2,z^3 soient alignés .
2. z,z^2,z^3 soient sommets d'un triangle isocèle
3. $1,\ z,z^2,z^3$ soient cocycliques.

Exercice 8:

Construction du polygone régulier a l'aide de la règle et du compas : On pose $w = e^{2i\frac{\pi}{5}}, a = w + w^4, b = w^2 + w^3$

1. Montrer que $1+a+b=0$ en déduire que a et b sont les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
2. Donner a en fonction de $cos(\frac{2\pi}{5})$, puis en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$
3. On note par $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ les points d'affixes $(w^i)_{1\leq i\leq 4}$ et H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe *(ox)* montrer que $\overline{OH} = \dfrac{a}{2}$
4. On note par M le point d'abscisse positive , point d'intersection de l'axe *(ox)* avec le cercle de centre C (- $\frac{1}{2}$) passant par *B(i)* montrer que $\overline{OM} = a$ et que H est le milieu de *[O , M]*
5. En déduire une construction du pentagone régulier a l'aide de la règle et le compas

---

Exercice 9:

Montrer que, pour tout nombre complexe z de module différent de 1 et tout entier naturel n, on a : $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$

Exercice 10:

Determiner tous les $z \in \mathbb{C}$ dont les racines cubiques z_1, z_2, z_3 verifient l'équation : $z_1 - z_2 = \frac{1}{z_3}$.

Exercice 11:

Soient *A(a)* , *B(b)* et *C(c)* trois point non alignés

1. Si on note par M le milieu de $[B, C]$ montrer que : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$ *(Théorème de la mediane)*
2. $\frac{|a-b|}{\sin(\hat{C})} = \frac{|b-c|}{\sin(\hat{A})} = \frac{|c-a|}{\sin(\hat{B})}$ *(loi des sinus)*

Exercice 12:

On considère quatre nombres réels *a, b, c et d* non nuls tels que b et d soient de même signe, et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Montrer que le rapport $\frac{az+b}{cz+d}$ est un nombre réel strictement positif, indépendant du choix d'un nombre complexe z tel que $cz+d$ soit non nul.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca