MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°9

Lundi le:11-Novembre-2002

Suites Réelles

1. Etudier les suites de terme général :

a. $\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ où x réel fixe

b. $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{E(kx)}{n^2}\right)$où x réel fixe

2. Montrer que la suite de terme général $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ diverge vers $+\infty$

3. Soit $(u_n) \in (IR^+)^{IN}$ montrer que : $\frac{u_n}{1+u_n} \to 0 \Leftrightarrow u_n \to 0$

4. Soit $(x_n) \in IR^{IN}$ convergente et L sa limite on suppose que $L \notin IN$

a. Montrer que $E(L) < x_n < E(L)+1$ a partir d'un certain rang.

b. En déduire que $(E(x_n))$converge vers $E(L)$

5. Soit $m \in IN^*$ on pose $u_n(m) = \sum_{k=n+1}^{nm}\frac{1}{k}$

a. Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge , soit$L(m)$ sa limite

b. Monter que $L(pq) = L(p)+L(q)\ \forall(p,q) \in IN^{*2}$

6. Soit $(u_n) \in (IR^+)^{IN}$ telle que $(u_{2n}),(u_{2n+1}),(u_{3n})$ convergent

a. montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite

b. en déduire que (u_n) converge

7. Moyenne de Cesaro:

a. Soit $(u_n) \in (IR^+)^{IN}$ convergente vers un nombre réel l , montrer alors que : $v_n = \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}$ converge aussi vers l.

b. Montrer qu'on a aussi le meme resultat si $l = +\infty$

8. On pose $u_n = cos(n), v_n = sin(n)$

a. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n

b. Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0

c. conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger

9. Soit $((u_n),(v_n)) \in ([0,1^{IN})^2$ tel que (u_nv_n) converge vers 1 , montrer que $(u_n),(v_n)$ le sont aussi

10. Montrer les resultats suivants :

a. $E(n\sqrt{n+1})+E(n\sqrt{n}) \sim 2n\sqrt{n}$

b. $u_n \sim \frac{ln(n)}{ln(10)}$ où u_n =le nombre de chiffres dans l'ecriture de n en base 10

c. $\frac{2^n+n^2-3}{2^n+3^n-n^{2002}} \sim (\frac{2}{3})^n$
d. $C_{2n}^n = o(a^n)$si $a > 4$
e. $a^n = o(C_{2n}^n)$si $0 < a < 4$

11. Recherche d'equivalent simple
a. Soit $(u_n) \in (IR^+)^{IN}$ a partir d'un certain rang telle que $u_n \to 0$ et $\exists(\alpha,\beta) \in IRxIR^{+*}$ tels que $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \to \beta$ montrer alors que : $u_n \sim (\frac{1}{n\beta})^{\frac{1}{\alpha}}$(Indication : On pourra utiliser la moyenne de Cesaro)
b. Application: Donner un equivalent simple des suivantes definies par $u_0 = a \in]0,1[$ et :
i. $u_{n+1} = ln(1+u_n)$ (Indication : $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$ pour $x > 0$)
ii. $u_{n+1} = sin(u_n)$ (Indication : $x - \frac{x^3}{6} < ln(1+x) < x$ pour $x > 0$)

12. $\forall n \in IN$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$
a. Montrer que $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ en déduire la limite de I_n
b. A l'aide d'une intégration par parties établir que : $(n+1)I_n = e^{-1} + I_{n+1}$
c. En déduire un équivalent simple de I_n

13. *Integrales de Wallis et formule de Stirling*:
On pose pout tout $n \in IN$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$ *Integrales de Wallis*
a. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}
b. Calculer I_{2n} et I_{2n+1}
c. Montrer que $I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n$, en déduire un équivalent simple de I_n
d. On pose pout tout $n \in IN$ $\alpha_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$, montrer que $\ln(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}) \sim -\frac{1}{12n^2}$
e. En deduire que α_n converge , on notera α sa limite sans chercher a la calculer
f. Exprimer $\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ en fonction de n et I_{2n}
g. En deduire α puis que : $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$ *formule de Stirling*:
h. En deduire $\lim\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$

14. *Moyenne arithmico-géometrique*:
Soit $(a,b) \in (IR^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
a. Montrer que ces suites sont bien définies
b. Montrer qu'elles sont adjacentes , on note par $M(a,b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et$b$
c. Montrer que pout tout $n \in IN$: $|a_n^2 - b_n^2| \le \frac{1}{2b^2}\left(\frac{b-a}{2b^2}\right)^{2^n}$
d. Donner une majoration de$a_n - M(a,b)$et $M(a,b) - b_n$en fonction de a,b,n
e. En déduire une valeur approche par défaut et une par excès de $M(2,1)$ a 10^{-5}*près*

15. *Calcul approche de π a l'aide de la methode des isopêrimétres*
a. Soit $(a,b) \in (IR^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}}$ Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes
b. Exprimer leurs limites communes en fonction de $arccos(\frac{b}{a})$
c. soit $n \in IN$,P_n le polygone régulier a $2n$ cote et de périmètre 2 , soir r_n le rayon du cercle inscrit et R_n celui du cercle circonscrit a P_n , montrer que $\forall n \ge 2$on a : $r_{n+1} = \frac{r_n+R_n}{2}, R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1}R_n}$,
d. En déduire qu'elle sont adjacentes puis en remarquant que $\frac{1}{R_n} \le \pi \le \frac{1}{r_n}$en déduire que $\frac{1}{R_n}, \frac{1}{r_n}$convergent vers π.

16. *Calcul approche de π a l'aide de la methode de Viete*

- **a**. Soit$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$,montrer que les suites $(2^n sin(\frac{\theta}{2^n}))$ et $(2^n \tan(\frac{\theta}{2^n}))$ sont adjacentes , calculer leurs limites communes
- **b**. Soit $((u_n),(v_n)) \in (IR^{IN})^2$définies par : $u_0 = 0, v_0 = 2, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, v_{n+1} = 2v_n$, montrer que$v_n(2-u_n) \to \pi$

17. Soit$(a,b) \in (IR^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$

- **a**. Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.
- **b**. Calculer leurs limites communes.

18. Soit $(u_n) \in (IR)^{IN}$ definie par : $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$

- **a**. Exprimer $\frac{1+u_n}{1-u_n}$ puis u_n en fonction de n .
- **b**. En deduire un equivakent simple de u_n.

19. Soit $((p_n),(q_n)) \in (IN^{*IN})/\frac{p_n}{q_n}$ converge vers une limite finie $l \notin Q$,on suppose $q_n \nrightarrow +\infty$

- **a**. Montrer qu'on peut extraire de q_n une sous suite borneé.
- **b**. Montrer qu'on peut extraire de q_n et p_n deux sous suites convergentes.
- **c**. En deduire qu'on peut extraire de q_n et p_n deux sous suites stationnaires.
- **d**. En deduire une contradiction puis conclure.

20. *Trissection de l'angle*:

Soit$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$,

- **a**. Exprimer $sin(3\theta)$ en fonction de $sin(\theta)$
- **b**. on pose $u_0 = sin(\theta), u_{n+1} = u_n + \frac{4}{27}u_{n+1}^3$,montrer que (u_n) converge et preciser sa limite.

21. Soit $(a,b) \in (IR^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose $u_0 = a, u_1 = b, u_{n+1} = \frac{u_n+u_{n-}}{2}$

- **a**. Montrer $(u_{2n}),(u_{2n+1})$que suites sont adjacentes.
- **b**. Calculer $u_{n+1} - u_n$, en deduire $\lim u_n$.