Série 8 : *Fonctions Usuelles*

Vendredi le 19 Décembre 2003

Exercice 1:

Enoncer et démontrer la formule de Machin :

Exercice 2:

Soient a, b sont deux nombres réels.Résoudre :

1. $\begin{cases} ch\,(x) + ch\,(y) = a \\ sh\,(x) + sh\,(y) = b \end{cases}$
2. $\begin{cases} ch\,(x) + sh\,(y) = a \\ sh\,(x) + ch\,(y) = b \end{cases}$
3. $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
4. $arctan(\frac{tan(2x)}{2}) + arctan(cotan^2(x)) = \pi - arctan(cotan(a))$ où $a \in]0, \pi[$.
5. $\lambda sh(x) - x(ch(x)ch(a) - 1) = 0$ où $a \in \mathbb{R}^{*+}, \lambda \in \mathbb{R}^+$
6. $arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{4}) = arctan(x)$
7. $2arctan(2) - arctan(\frac{1}{4}) = arctan(x)$
8. $arccos(sin(x)) + arcsin(cos(x)) = 1$
9. $arcsin\,(1) = arcsin(\frac{5}{13}) + arcsin(x)$
10. $arctan(2x) + arctan(x) = \frac{\pi}{4}$
11. $arcsin(x) + arcsin(2x) = arccos(x) + arccos(2x)$

Exercice 3:

Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :$arcsin(sin(x)) + arccos(cos(y)) = x + y$.

Exercice 4:

Etudier les variations des fonctions definies par :

1. $f : x \to \arccos\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$.
2. $f : x \to \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$.

Exercice 5:

Déterminer les points d'inflexion (où f''change de signe) de $f : x \to a^{a^x}$,discuter leurs existence et chercher leur lieu quand a varie dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6:

Montrer que $\forall (x,y) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a : $Arctan(x)+Arctan(y)=Arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+p\pi$ où p est un entier à déterminer en discutant sur les signes .

Exercice 7:

On considère la fonction : $f(x)=ch\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$.

1. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2. La courbe coupe l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses en un point A, calculer l'abscisse de A.

Exercice 8:

Simplifier les expressions suivantes : $\ln\left(\sqrt{\frac{1+th(x)}{1-th(x)}}\right)$; $\frac{1+th^2(x)}{1-th^2(x)}$.

Exercice 9:

Soit $x \in]0,1]$. On pose $y=\arccos(x)$.

1. Exprimer en fonction de x : $cos(y), sin(y), tan(y)$.
2. En déduire que $arccos(x)=\arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$.
3. Si $x=0$, quelle est la valeur de $\arccos(x)$?.

Exercice 10:

On considère la fonction :$f(x)=arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-2arctan(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f .Calculer f' .
2. En déduire une expression simple de f sur des intervalles à choisir.
3. Dessiner la représentation graphique de f.

Exercice 11:

Soit la fonction $y=sin(nArcsinx)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1-x^2)y"-xy'+n^2y=0$

Exercice 12:

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2 : \cos(a)\cos(b)\neq 0$. Montrer que : $\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$.
2. Résoudre les équations suivantes :

$$\tan(x)=\tan(2x);\tan(x)=-\tan(2x);\tan(2x)=\tan(\frac{x}{2})$$

Exercice 13:

On sait que $\forall x\in\mathbb{R} : \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, résoudre l'équation : $\cos^n(x)+\sin^n(x)=1$ pour $n\geq 3$ .21^{eme} *Olympiades : USA-19992*

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc