Série 9 : *Arithmétique*

Samedi 04 Novembre 2004

Exercice 1:

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3$: (9 divise $a^3 + b^3 + c^3$) $\Rightarrow$ (3 divise a ou b ou c)
2. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3$: (7 divise a ^{3} + b ^{3}+ c ^{3}) $\Rightarrow$ (7divise abc)
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : 6 divise $5n^3 + n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : 9 divise $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

Exercice 2:

$Nombres\ de\ Fermat$ (mathématicien $français$: $1601 - 1665$) .Les nombres de $Fermat$ sont ceux de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. montrer que tous ces nombres sont premiers entre eux deux a deux
2. montrer que F_n est premier pour $n \in [|0,4|]$ mais F_5 ne l ' est pas
3. soit $a \in \mathbb{N}^*$ montrer que si $2^a + 1$ est premier alors a est une puissance de 2

   A l'heure actuelle on ne connaît aucun nombre de $Fermat$ premier autre que ceux de (2) mais on connaît plusieurs qui ne le sont pas : F_{1945}(qui a plus de 10582 chiffres) est divisible par $2^{1947}5 + 1$(qui a exactement 587 chiffres)

Exercice 3:

1. Montrer que si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est solution de l'équation : $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + . + a_0 = 0$ avec $p \wedge q = 1$ et $(ai)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^{n+1}$ alors : p divise a_0 et q divise a_n *critère d'Eseinstein*
2. résoudre l'équation : $30X^3 - 37X^2 + 15X - 2$

Exercice 4:

Donner le chiffres des unités de 4444^{4444} .On pourra travailler dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 5:

On pose $N = 4444^{4444}$, A la somme des chiffres de N , B celle de A et C celle de B , trouver C.(On pourra utiliser aprés l'avoir justifié qu'un nombre et la somme de ses chiffres sont toujours *congrus modulo* 3 et 9)

Exercice 6:

Soit $N = 111111111$, écrit en base 10 , démontrer que : $N^2 = 12345678987654321$

Exercice 7:

1. Nous sommes le mercredi $08-12-2004$, l'année prochaine quel jour sera le $08-12-2005$?
2. Dans quelle année le $08-12$ sera un mercredi ?

Exercice 8:

1. Montrer que tout entier supérieur a 2 non premier admet au moins un diviseur premier inférieur a sa racine.
2. Enoncer le *crible d'Erathosténe* qui permet de tester si un nombre est premier.
3. Les nombres premiers suivants sont - ils premiers : 353 , 91451

Exercice 9:

Montrer que si p est premier alors :$(p-1)! \equiv -1 (modp)$ *Théoréme de Wilson*

On pourra utiliser le fait que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tout élément est inversible et ainsi multiplier tous ces éléments entre eux

---

Exercice 10:

Résoudre le systéme suivant d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

$$4 \quad divise \quad n$$
$$n \quad admet \quad 10 \quad diviseurs \quad dans \quad \mathbb{N}$$
$$il \quad existe \quad un \quad nombre \quad premier \quad p \quad tel \quad que \quad n = 37p + 1$$

Exercice 11:

Trouver tous les chiffres x et y qui vérifient : $\overline{28x75y}^{10}$ est divisible par 3 et par 11.

Exercice 12:

Soit p un nombre premier.Montrer que p/C_p^k $\forall k \in [|1, p-1|]$. *Utiliser Gauss*

Exercice 13:

Soit p un nombre premier.Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^p \equiv n \quad [p]$ *(Petit Théorème de Fermat)*

Exercice 14:

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ montrer que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a+b) = 1$.

Exercice 15:

Resoudre dans $\mathbb{N}^*$ le systéme suivant : $\begin{cases} x \geq y \\ x \vee y = (x \wedge y)^2 \\ x \vee y + x \wedge y = 156 \end{cases}$

Exercice 16:

Soit $n \in \mathbb{N}$,on pose $x = 3n+1, y = 5n-1$.

1. Montrer que $x \wedge y$ divise 8.
2. Trouver les entiers n tels que $x \wedge y = 8$.

Exercice 17:

Soit $n \in \mathbb{N}$ .Montrer que 2^n divise $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$

Exercice 18:

Soient $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que :$m \geq n$ .On pose $m = qn + r$ avec $0 \leq r < n$

1. montrer que : $\exists b \in \mathbb{N}\,;\, a^m - 1 = (a^n - 1)b + a^r - 1$.
2. Montrer que : $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1$.
3. Montrer que : $(a^n - 1)$ divise $(a^m - 1) \Longleftrightarrow n$ divise m

---

Exercice 19:

Soit N_k le nombre qui s'écrit avec k chiffres 1 en base 10, montrer que : $N_h / N_k \Longleftrightarrow h/k$
.

Exercice 20:

Nombres de Mersenne : ils sont de la forme : $M_p = 2^p - 1$ avec p premier.

1. Montrer que les *Nombres de Mersenne* sont premiers entre eux deux a deux
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que : $a^b - 1$ est premier ,montrer alors que : $a = 2$ et b premier

---

Exercice 21:

Pour tout entier n on note par $D(n)$ l'ensemble de ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ et $\varphi(n) = \sum\limits_{d/n} d$ .Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$

1. Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors chaque diviseur de nm s'écrit sous la forme dd' où d divise n et d' divise m
2. En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow D(nm) = D(n) \text{x} D(m)$
3. En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

Exercice 22:

On rapelle que si $n \geq 2$ et p premier $v_p(n)$ désigne la puissance de p dans la décomposition de n en produits de facteurs premiers

1. Montrer que $\forall i \in IN$ p^i divise $n \Longrightarrow i \leq v_p(n)$

2. Montrer que $\forall (i,j) \in IN^2 \ p^{i+j} \leq n \Longrightarrow E\left(\frac{1}{p^j}E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right)$
3. On pose $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$, montrer que : $v_p(n!) = m + v_p(m!)$
4. *Applications :*
   (a) Calculer $v_7(10000!)$
   (b) Decompose 16! en produits de facteurs premiers.
   (c) Monter qu'en base 10 , 1000! se termine par 249 zeros.

Exercice 23:

<u>*Préambule*</u> :

-Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $\varphi(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$

-Soit $n \in \mathbb{N}^*$.On dit que n est parfait *ssi* $\varphi(n) = 2n$.

-On appelle *Nombre d'Euclide* tout entier naturel de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ tel que $p \quad 2^p - 1$ sont premiers .

1. Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors chaque diviseur de nm s'écrit sous la forme *dd'* où d divise n et *d'* divise m
2. En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
3. Soit $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ un *Nombre d'Euclide* .Trouver tous les diviseurs de E_p .
4. En déduire que les *Nombres d'Euclide* sont tous parfaits
5. Soit N un nombre parfait pair.
   (a) Montrer que : $\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists q \quad$ *impair* tel que : $N = 2^m q$
   (b) Montrer que $\exists r \in \mathbb{N}^* \quad / \quad q = (2^{m+1} - 1)r, \varphi(q) = 2^{m+1}r$ .On pourra utiliser (2).
   (c) Montrer que *r=1*.On pourra utiliser le fait que N est parfait.
   (d) Montrer que $p, 2^p - 1$ sont premiser où *p=m+1*
   (e) Conclure
6. (*) Soit N un nombre parfait impair $\geqslant 3$ .Montrer que N admet au moins 3 diviseurs premiers et en déduire que $N \geq 105$

A l'heure actuelle on ne sait pas s'ils existent des nombres parfaits impairs

---

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca