MPSI 1
CPGE Agadir

N°12

Fonctions convexes
Samedi le 08-12-2001

Exercice 1 :

Montrer que : $(2/\pi)\,x \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$

Exercice 2:

Soit f de classe C^1 convexe et positive sur IR ayant une dérivée positive sur IR étudier les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$ et $x f'(x)$

Exercice 3:

1. Soit f de classe C^2convexe sur IR , on suppose qu'il existe $(a,b) \in IR^2$ e et $\lambda \in]0,1[$ tel que $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$, montrer alors que f est affine sur $[a,b]$
2. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement continue convexe

Exercice 4:

1. Soit $(a,b) \in IR^2$ $(a<b)$ et f de classe C^2 convexe sur $[a,b]$ qui admet un minimum en a montrer alors que f est croissante
2. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement continue convexe

Exercice 5:

Soit f de classe C^2convexe sur IR , on suppose qu'il existe $a \in IR$ tel que $f'(a)=0$, montrer que f admet un minimum global en a

Exercice 6: Méthode de Newton (DS 2000 -2001)

Soit $(a,b) \in IR^2$ $(a<b)$ et f de classe C^2convexe sur $[a,b]$

1. montrer que si l'équation $f(x)=0$ admet au moins 3 solutions alors f est nulles entres ses solutions

2. on suppose dans la suite que $f'>0$ sur $[a,b]$ et $f(a)f(b)<0$ montrer alors que l'équation $f(x)=0$ admet une solution que l'on notera α
3. on pose $x_0=b$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ montrer que $M(x_{n+1}, 0)$ est l'intersection de l'axe (ox) avec la tangente a la courbe de f au point $N(x_n,f(x_n))$
4. montrer que $|x_{n+1} - \alpha| \leq k\ |x_n - \alpha|^2$ pour $n\in IN$
   (avec $k = \sup(f'')/\inf(f')$)
5. en déduire une majoration de $|x_n - \alpha|$ en fonction de n
6. en prenant $f(x)=\ln(x) - 1$ sur $[2,3]$ donner une valeur approchée de e a 10^{-4} près

Exercice 7: Inégalité arithmico - géométrique

En utilisant la convexité de $f : x \rightarrow -\ln(s)$ sur $]0,+\infty[$ montrer que :
$\forall n\in IN^* \ \forall(x_1, x_2, \dots, x_n) \in IR^{+\ n}$ on a :
$(\prod_{1\leq i\leq n} x_i)^{1/n} \leq (\sum_{1\leq i\leq n} x_i)/n$

Exercice 8: Inégalités de Holder et Minkowski

1. En utilisant la convexité de $f : x \rightarrow -\ln(s)$ sur $]0,+\infty[$ montrer que :
   $\forall(a,b) \in IR^{2+}$ $\forall(p,q) \in IR^{+*2}$ tel que $1/p + 1/q = 1$ on a :
   $a^{1/p}b^{1/q} \leq a/p + b/q$
2. soient $n\in IN^*$, $((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))IR^{+\ n\,2}$ et $(p,q) \in IR^{+*2}$ tel que $1/p + 1/q = 1$ en utilisant (1) pour $a_i = x_i^p / (\sum_{1\leq j\leq n} x_j^p)$ et $b_i = x_i^q / (\sum_{1\leq j\leq n} x_j^Q)$ montrer que : $(\sum_{1\leq j\leq n} x_j y_j) \leq (\sum_{1\leq j\leq n} x_j^p)^{1/p} (\sum_{1\leq j\leq n} y_j^q)^{1/q}$ (Inégalité de Minkowski)
3. énoncer l'inégalité de Cauchy-schwartz pour p=q=2
4. soient $n\in IN^*$, $((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))IR^{+\ n\,2}$ et $(p,q) \in IR^{+*2}$ tel que $1/p + 1/q = 1$ en déduire de (2) l'inégalité suivante dite de Holder :
   $(\sum_{1\leq j\leq n} (x_j + y_j)^p)^{1/p} \leq (\sum_{1\leq j\leq n} x_j^p)^{1/p} + (\sum_{1\leq j\leq n} y$

$j^{\,p})^{1/p}$