MPSI 1
CPGE Agadir

N° 9

Fonctions réelles
Lundi le 26-11-2001

Exercice 1 :

Pour tout entier n et réel x on pose $f_n(x)=x+2x^2+3x^3+….+nx^n$

1. montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet un solution unique que l'on notera x_n
2. calculer $f_{n+1}(x_n)$ en déduire que (x_n) est décroissante puis qu'elle converge
3. montrer que pour x différent de 1 on a :$f_n(x)=x(1-(n+1)x^n+nx^{n-1})(x-1)^{-2}$
4. calculer x_1 , puis en déduire les limites des suites x_n^n , nx_n^n et x_n

Exercice 2 :

Trouver toutes les fonctions $f:IR \rightarrow IR$ continues telles que

1. $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x et y
2. $f(xy)=f(x)f(y)$ pour tous réels x et y
3. $f(x+y)=f(x)\ f(y)$ pour tous réels x et y
4. $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x et y

Exercice 3 :

Etudier la monotonie sur IR^{+*} de la fonction réelle :

$f : x \rightarrow xE(1/x) -1$

Exercice 4 :

1. soit $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ croissante continue montrer que f admet un unique point fixe
2. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement croissante
3. a-t-on le même résultat si f est décroissante

Exercice 5 :

On pose $f(x)=x^2(2+\sin(1/x^2))$ si $x>0$ et $f(0)=0$ montrer que f ademt un minimum en strict en 0 mais f n'est croissante sur aucun intervalle de la forme $[0,a]$

Exercice 6 :

On pose $f(x)=x/(1 + x\sin(1/x))$ si $0<x\leq 1$ et $f(0)=0$ montrer que f est dérivable sur strictement croissante mais que l'équation $f'(x)=0$ admet une infinité de solutions

Exercice 7 :

1. soit $f :[a,b] \to IR$ de classe C^1 montrer que f injective $\Rightarrow$f strictement monotone
2. reprendre la même question en supposant cette fois f continue

Exercice 8 :

soit $f :[a,b] \to IR$ dérivable telle que $f(0)=0$ on pose $S_n(f)=\sum_{n \leq k \leq 2n} f(1/k)$

1. montrer que la suite $x_n=\sum_{n \leq k \leq 2n}(1/k)$ est convergente soit L sa limite , on ne cherchera pas a la calculer
2. montrer que $S_n(f)$ converge vers un reel S qu'on exprimera en fonction de L et $f'(0)$ (indication : on pourra utiliser la définition de f dérivable en 0)
3. en prenant $f(x) = \ln(1+x)$ expliciter S puis en déduire L

Exercice 8 :

Soit $n\in IN^*$ Calculer la derive n^{eme} de la fonction $f_n(x)=(x\ln x)^n$

Exercice 9 : Théorème des accroissement finis généralises

Soient $f,g : [a,b] \to IR$ continues dérivables sur $]a,b[$ tel que $|f'(x)|\leq g'(x)\ \forall x\in]a,b[$ montrer alors que $|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$

Exercice 10 : Problème d'emballage

Une usine fabrique des boites paralleipediques sans couvercle de la façon suivante : on prend une feuille rectangulaire de carton de cotes a et b puis on découpe de chaque coin un carre de cote x puis on rabat les morceau ainsi obtenues , quelle est la valeur de x qui réalise un volume maximal

Exercice 11 : **Algorithme de Newton**

Soit $a>0$

1. **étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction définie par $f(x)=(x + a/x) / 2$**
2. **justifier que la suite définie par $x_0=a$ et $x_{n+1}=f(x_n)$pour tout $n\in IN$ est bien définie**
3. **montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $x_{n+1} - \sqrt{a} = (x_n - \sqrt{a})^2 / (2x_n)$**
4. **montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $x_{n+2} - x_{n+1}= (a - x_{n+1}^2) / (2x_{n+1})$**
5. **en déduire que $x_n \rightarrow \sqrt{a}$**
6. **montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a}\leq(x_n - \sqrt{a})^2 /(2\sqrt{a})$**
7. **en déduire une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n et a**
8. **en déduire une valeur approchée de π a 10^{-3} près (on admet que $2<\pi<3$)**
9. **écrire un programme en Maple® qui affiche les 20 premiers termes de la suite x_n**
10. **écrire un programme en Maple® qui donne une valeur approchée de π a 10^{-8} près**

Exercice 12 :

Soit (u_n) la suite definie par $u_1=1/2$ et $u_{n+1}=(1 + u_n^2)/2$ $\forall n\in IN$

1. **ecrire un programme Maple® qui affiche les 20 premiers termes de la suit (u_n)**
2. **calculer a l'aide d'une calculatrice la valeur de u_{10}**
3. **etudier sur[0,1] la fonction f definie par $f(x)=(1+x^2)/2$, en deduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge calculer sa limite**
4. **dans toute la suite on pose $v_n=1-u_n$**
   - **montrer que $\forall n\geq 1$ on a : $v_{n+1}^{-1} - v_n^{-1} = (2 - v_n)^{-1}$**
   - **en déduire que $\forall n\geq 1$ on a : $v_n^{-1}\geq(n+3)/2$**
   - **montrer que $\forall x\in[0 ,1]$ on a : $1 /(2-x)\leq 1/2 + x/2$**
   - **en déduire que $\forall n\geq 1$ on a : $v_{n+1}^{-1} - v_n^{-1}\leq 1/2 + 1/(n+3)$**
   - **en déduire que $\forall n\geq 2$ on a : $\sum_{1 \leq k \leq n} (1/k) \leq \ln(n)$**
   - **en déduire que $\forall n\geq 1$ on a : $v_n^{-1} \leq (n+2)/2 + \ln(n+2)$**

5. en déduire un équivalent simple de v_n