Série 8 : *Groupe symétrique*

Lundi 08 Novembre 2004

Résumé de cours :

Permutaion : On appelle permeutation de $[|1,n|]$ toute bijection $\sigma : [|1,n|] \rightarrow [|1,n|]$. L'ensemble de ces permutaions se note $\mathcal{S}_n$, muni de la loi o est un groupe non abélien de cardinal $n!$, on l'appelle groupe symétrique d'ordre n.

Support : Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle support de σ, l'ensemble $\text{supp}(\sigma) = \{k \in [|1,n|] \text{ tel que: } \sigma(k) \neq k\}$.

Transposition : On appelle transposition toute permutation dont le support est formé par deux éléments. Dans ce cas si $\text{supp}(\sigma) = \{i,j\}$ alors $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$, on note alors $\sigma = (i \quad j)$ et on a : $\sigma^2 = id_{[|1,n|]}$.

p-cycles : On dit que σ est un p-cycle si $\exists (i_1, i_2, \dots, i_p) \in [|1,n|]^p$ tel que: $\text{supp}(\sigma) = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ avec $\sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \forall 1 \leq k \leq p-1$ et $\sigma(i_p) = i_1$. Dans ce cas on écrit $\sigma = (i_1 \quad i_2, \dots i_p)$ et on a : $\sigma^p = id_{[|1,n|]}$. Notez bien que les transpostions sont des 2-cycles.

$(i_1 \quad i_2, \dots i_p) = (i_1 \quad i_2)(i_2 \quad i_3)\dots(i_{p-1} \quad i_p)$. C'est à dire que tout p-cycle peut s'écrire comme produit de $p-1$ transposions.

Théorème 1 : Toute permutation peut s'écrire comme produit de p-cycles. On dit que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les p-cycles.

Corollaire : Toute permutation peut s'écrire comme produit de transposition. On dit que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.

Inversion : On appelle inversion de σ, tout couple $(i,j) \in [|1,n|]^2$ tel que: $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Signature : On appelle signature de σ, noté $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, définie par $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{Nombre d'inversions de } \sigma}$. Elle définit un morphisme de group entre $(\mathcal{S}_n, o)$ et $(\{-1,1\}\times)$, c'est à dire que $\forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2$ on a : $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Théorème 2 : la signature d'une transposition est toujours -1.

Théorème 3 : la signature d'un p-cycle est toujours $(-1)^p$.

Permutation paire : On appelle permutation paire toute permutation de signature 1.

Groupe alterné : L'ensemble des pemutations paires se note $\mathcal{A}_n$, c'est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, de cardinal $\frac{n!}{2}$, on l'appelle groupe alterné d'ordre n.

Théorème 4 : Toute permutation paire peut s'écrire comme produit de 3-cycles. On dit que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Problème :

On définit sur $\mathcal{S}_n$la relation suivante : $\pi \Re \sigma \Longleftrightarrow \text{supp}(\pi) \subset \text{supp}(\sigma)$ et $\exists \tau \in \mathcal{S}_n$ tel que: $\text{supp}(\tau) \cap \text{supp}(\pi) = \emptyset$ et $\sigma = \pi o \tau$.

On dit qu'une permutation σ est irréductible $\forall \pi \in \mathcal{S}_n, \quad \pi \Re \sigma \Longrightarrow \pi = \sigma$ ou $\pi = id_{[|1,n|]}$. 1. Donner supp$(id_{[|1,n|]})$.

2. Donner un exemple où $supp(\sigma) = \{1,3\}$ avec $n = 5$.

3. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, montrer que : supp$(\sigma) = \emptyset \Longrightarrow \sigma = id_{[|1,n|]}$ en déduire que : $id_{[|1,n|]}$ est irréductible.

4. Donner un exemple d'une permutation irréductible autre que $id_{[|1,n|]}$.

5. Soit $(\pi,\tau) \in \mathcal{S}_n^2$ tel que: supp$(\pi)\cap$supp$(\tau) = \emptyset$, montrer que ; $\forall i \in [|1,n|] \quad i \in supp(\tau) \Longrightarrow \pi(\tau(i)) = \tau(i)$.

6. Soit $(\pi,\tau) \in \mathcal{S}_n^2$, en déduire que : supp$(\pi)\cap$supp$(\tau) = \emptyset \Longrightarrow \tau o \pi = \pi o \tau$.

7. Soit $(\pi,\sigma) \in \mathcal{S}_n^2$ tels que : $\pi \Re \sigma$, montrer que : supp(σ)=supp$(\pi) \cup supp(\tau)$ (où τ est la permutation citée dans la définition).

8. Soit $(\tau_1,\tau_2) \in \mathcal{S}_n$ tels que : supp$(\tau_1)\cap$supp$(\tau_2) = \emptyset$, montrer que supp$(\tau_1 o \tau_2)$ $\subset$supp$(\tau_1)\cup$supp(τ_2).

9. En déduire que $\Re$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

10. Montrer que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists \pi_1,\pi_2,..,\pi_p$ permutations de $[|1,n|]$ irréductibles telles que : $\sigma = \pi_1 o \pi_2 o..o \pi_p$.

11. A quel notions connus sur $\mathbb{N}$ ressemblent la relation $\Re$ et les permutations irréductibles.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca