CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Intégration sur un segment*

25 avril 2009

Blague du jour :
Un directeur de société, décide un jour de trouver un remplaçant. Il finit par trouver un jeune ingénieur motivé. Avant de quitter l'entreprise, il donne au jeune homme trois enveloppes numérotées, et lui demande ouvrir, dans l'ordre, une seule à chaque fois que l'entreprise rencontre un problème.
Le nouveau directeur trouva déjà la firme en difficulté mais décide de bosser plutôt que d'appliquer les conseils de son ancien. Pendant les 6 premiers mois, tout va bien, l'entreprise à même repris du des forces, mais la progression ne dura pas beaucoup. Se rappelant des conseils de l'ancien directeur, le jeune homme ouvre l'enveloppe n°1 et y trouve un carton sur lequel il est écrit : licencie 3% du personnel. Le nouveau directeur s'exécute. Les employés protestent un peu, mais comme l'entreprise repart tout est vite oublié.
Six mois plus tard, une autre chute des marchés met la société dans une mauvaise situation. Le directeur ouvre alors l'enveloppe n°2 et y trouve un carton où il est écrit : licencie 30% du personnel. Il y eut beaucoup de grèves, mais finalement, l'entreprise repartit de nouveau sur les chapeaux de roues.
Un an plus tard, l'entreprise est au bord du dépôt de bilan et le nouveau directeur finit par ouvrir la 3ème enveloppe. Voilà ce qu'il trouva écrit sur le carton : "Trouve un remplaçant donne lui les trois enveloppes et cherche une meilleure place ailleurs."

Mathématicien du jour ***Darboux***
Jean Gaston Darboux (1842-1917), est un mathématicien français. Ses travaux concernent l'analyse (intégration, équations aux dérivées partielles) et la géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces).
Il reçoit le grand prix de l'Académie des sciences et la médaille Sylvester de la Royal Society.

Dans tous les énoncés $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$

Exercice 1 **. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$ dans les cas suivants :**

1) f **de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.**
2) f **en escalier sur $[a, b]$.**
3) f **continue par morceaux sur $[a, b]$**

Exercice 2 **. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a)=f(b)=0$.**

1) **Etudier sur $[0,b-a]$ les variations de la fonction G_a définie par : $G_a(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}|t|dt$.**

2) **En déduire $\displaystyle\inf_{[0,b-a]} G_a$.**

3) **En utilisant le changement de variable $u=t+x$, montrer que**

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq M_1(f)F_{b-a}(x+a)\quad \textbf{avec } M_1(f)=\sup_{[a,b]}|f'|.$$

4) **En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq M_1(f)\frac{(b-a)^2}{4}$.**

5) **Quand a-t-on l'égalité ?**

Exercice 3 **. Inégalité de Jensen.**
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $\displaystyle g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))\,dt$.

Exercice 4 **. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et $\exists n\in\mathbb{N}$ vérifiant**

$$\int_0^1 t^k f(t)dt=0,\quad \forall 0\leq k\leq n.$$

1) **Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt=0$, $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$.**

2) **Soit $r_1,\dots,r_p$ les racines, distinctes de f dans $[a,b]$ dans lesquels f change de signe.**
   Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^p(t-r_k)f(t)$ garde un signe constant dans $[a,b]$.

3) **Conclure que f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[a,b]$ en changeant de signe.**

Exercice 5 **. Moyenne géométrique.**
Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Montrer que :
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\exp\left(\int_t^1 f(t)\,dt\right)$
On pourra utiliser : $\forall\ x\geq-\dfrac{1}{2},\ x-x^2\leq\ln x\leq x$.

Exercice 6 **. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f=\frac{1}{2}$. Montrer que f possède un point fixe sur $[0,1]$.**

Exercice 7 **. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue.**
On pose $\displaystyle g(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt$. Montrer que $g^{(n)}=f$.
Penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 8 . **Formule de la moyenne généralisée.**
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, f positive.

1) **Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que**

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$$

2) **Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.**
3) **Application : Soit f continue au voisinage de 0.**
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$.

Exercice 9 . **Sommes de Riemann.**
Déterminer les limites des suites suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
2) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
3) $\displaystyle\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
4) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$, **on pourra utiliser l'inégalité :** $x \leq e^x - 1 \leq x + \dfrac{ex^2}{2}$, $\forall x \in [0,1]$.
5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$ **On pourra s'inspirer de l'exemple précedent.**
6) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}$ **pour $k \geq 2$ fixé.**
7) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.
8) $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$.
9) $\displaystyle\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(\frac{3k}{n})}$.
10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. **Donner un équivalent simple.**
11) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.
Où $A_1, A_2, \dots, A_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre 0 et rayon 1.

Exercice 10 . **Méthode des rectangles aux milieux.**
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ et $I_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1) **Donner une interprétation géométrique de I_n.**
2) **Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - I_n\right| \leq \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.**
3) **Comparer la rapidité de convergence de cette méthode avec celle des trapèzes.**

Fin
à la prochaine