Feuille d'exercices : *Champs de vecteurs Cinématique*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Exercice 1. *Dans chacun des cas suivants calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S orientée vers l'extérieur. :*

1) $\overrightarrow{V}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$, *S une sphère quelconque.*
2) $\overrightarrow{V}(x,y,z)=(y,x,y+z)$.
   $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que* $2x+y+z=2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.
3) $\overrightarrow{V}(x,y,z)=(y^2,x^2,z^2)$.
   S est le bord de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que* $x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0\}$.
4) $\overrightarrow{V}(x,y,z)=(x,y,-2z)$.
   S est la partie du cône d'équation : $x^2+y^2+z^2=0$ *comprise entre les plans d'équations* $z=0$ *et* $z=1$

Exercice 2. *Calculer les intégrales curvilignes :*

1) $\int_{(\gamma)}(x^2+y^2)ds$ *où* (γ) *est le cercle de centre O et de rayon R.*
2) $\displaystyle\int_{(\gamma)} xyds$ *où* (γ) *est l'ellipse d'équation :* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
3) $\displaystyle\int_{(\gamma)}\omega$ *où* $\omega=\dfrac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2}$
   a) $(\gamma)=\wp(O,1)$
   b) $(\gamma)=$*le carré de diagonale* $A(1,-1)\,;B(-1,1)$

Exercice 3. *Soit $\overrightarrow{V}$ un champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ montrer que :* $div\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{V}\right)\right)=0$

Exercice 4. *Calculer :* $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$
Avec : $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tels que :* $x\geq 0; y\geq 0; x^2+y^2\leq 1\}$
Directement, à l'aide d'un changement de variable bien choisi, puis en utilisant le théoréme de Green-Riemann.
Reprendre les méme questions pour : $\displaystyle\iint_D xydxdy$
où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que : } x\geq 0; y\geq 0; \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$

Exercice 5. *Une riviére est limitée par deux rives parallélles diastantes de d. Un bateau part d'un point A sur l'une des rives pour se rendre en face en O. Son vecteur vistesse $\overrightarrow{V}$ est a chaque instant la somme de sa vitesse propre $\overrightarrow{V_1}$ dirigéé vers O et de la vitesse du courant parallléle aux rives*

1) *Déterminer la trajectoire du bateau*
2) *Quel est le temps mis par le bateau pour rejoindre O*

Exercice 6. *Un mobile se déplace le long d'une trajaectoire parabolique d'équation :*$y^2 = 2px$*.Un autre mobile* M_1*se déplace le long d'une autre trajaectoire parabolique d'équation :*$y^2 = 2p_1x, (p > p_1 > 0)$ *de façon que sa vitesse soit constamment parallélle à celle de* M*, on suppose de plus qu'à tout instant, le vecteur* $\overrightarrow{MM_1}$ *et le vecteur de accéléation de* M *ont même projection orthogonale sur* (Oy) *.Détérminer les équations du mouvements de* M *sachant qu'à l'instant initial,* M *est en* O *et* $\overrightarrow{V_0} = v_0\overrightarrow{j}$

Torseurs.

Rappels.
définition : $f(M) = f(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{S}$,
$\overrightarrow{S}$ = somme et $f(O)$ = moment en O.
propriété : $\Big(f(B) - f(A)\Big) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. (champ équiprojectif)
invariant scalaire : $i = f(O) \cdot \overrightarrow{S}$.
comoment de deux torseurs : $c = \dfrac{1}{2}\big(f(O) \cdot \overrightarrow{S}\,' + f'(O) \cdot \overrightarrow{S}\big)$.
couple = torseur constant.
glisseur = torseur s'annulant en un point avec $\overrightarrow{S} \neq \vec{0}$.
CNS : $\overrightarrow{S} \neq \vec{0}$, $i = 0$.
axe central : $D = \{M$ tel que $f(M)$ est colinéaire à $\overrightarrow{S}\}$
axe central : $D = H + \mathbb{R}\overrightarrow{S}$ avec $\overrightarrow{HO} = \dfrac{f(O) \wedge \overrightarrow{S}}{\|\overrightarrow{S}\|^2}$.
module : $\|f(M)\|^2 = \|f(H)\|^2 + \|\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{S}\|^2$.
lignes de champ d'un torseur = hélices d'axe D.
glisseur associé à A, B : $f(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
couple = somme de deux glisseurs de vecteurs opposés.

Exercice 7. *Soient* A *et* B *deux points distincts de l'espace et* T *un torseur. Donner une condition necessaire et suffisante pour que* T *soit la somme de deux glisseurs* g_1 *et* g_2 *dont les axes contiennent* A *et* B *respectivement.*

Exercice 8. ***Moment parallèle à un plan.***
Soient $\mathcal{T}$ *un torseur et* $\mathcal{P}$ *un plan. Déterminer le lieu des points* $M \in \mathcal{P}$ *tels que*

Exercice 9. ***Torseurs de sommes orthogonales.***
Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ *deux torseurs de sommes non nulles, orthogonales. Montrer que le comoment de* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *est nul si et seulement si les axes centraux sont concourants.*

Exercice 10. ***Somme de glisseurs.***
Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les glisseurs :*

$\mathcal{G}_1$ *d'axe* $\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases}$ *et de vecteur* $\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j}$.

$\mathcal{G}_2$ *d'axe* $\begin{cases} y = -mx \\ z = -1 \end{cases}$ *et de vecteur* $\vec{v} = \vec{i} - m\vec{j}$.

Déterminer l'axe central de $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$.

Exercice 11. ***Produit vectoriel de torseurs.***
Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ *deux torseurs de sommes* $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$. *On définit le champ* $\mathcal{T}$ *par :*

$$\mathcal{T}(M) = \overrightarrow{R}_1 \wedge \mathcal{T}_2(M) + \mathcal{T}_1(M) \wedge \overrightarrow{R}_2.$$

1) *Montrer que* $\mathcal{T}$ *est un torseur de somme* $\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2$

2) *Si* $\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2 \neq \vec{0}$, *montrer que l'axe central de* $\mathcal{T}$ *est la perpendiculaire commune des axes centraux de* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$.

Fin.