

FEUILLE D'EXERCICES : *Champs de vecteurs* *Cinématique.*

Prépas PCSI.

Mr Mamouni : myismail@altern.org

Source disponible sur:

©<http://www.chez.com/myismail>

1) Dans chacun des cas suivants calculer le flux de \vec{V} à travers la surface S orientée vers l'extérieur. :

- a) $\vec{V}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, S une sphère quelconque.
- b) $\vec{V}(x, y, z) = (y, x, y + z)$.
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
- c) $\vec{V}(x, y, z) = (y^2, x^2, z^2)$.
 S est le bord de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
- d) $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.
 S est la partie du cône d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 1$

2) Calculer les intégrales curvilignes :

- a) $\int_{(\gamma)} (x^2 + y^2) ds$ où (γ) est le cercle de centre O et de rayon R .
- b) $\int_{(\gamma)} xy ds$ où (γ) est l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- c) $\int_{(\gamma)} \omega$ où $\omega = \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2}$
 - i. $(\gamma) = \varphi(O, 1)$
 - ii. $(\gamma) =$ le carré de diagonale $A(1, -1); B(-1, 1)$

3) Calculer : $\int \int_D (x + y) dx dy$

Avec : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } : x \geq 0; y \geq 0; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Directement, à l'aide d'un changement de variable bien choisi, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Reprendre les même questions pour : $\int \int_D xy dx dy$

où $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } : x \geq 0; y \geq 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

- 4) Soit \vec{V} un champs de vecteurs de classe φ^2 montrer que :
 $\text{div}(\text{rot}(\vec{V})) = 0$
- 5) Une rivière est limitée par deux rives parallèles distantes de d . Un bateau part d'un point A sur l'une des rives pour se rendre en face en O . Son vecteur vitesse \vec{V} est a chaque instant la somme de sa vitesse propre \vec{V}_1 dirigée vers O et de la vitesse du courant parallèle aux rives
 - a) Déterminer la trajectoire du bateau
 - b) Quel est le temps mis par le bateau pour rejoindre O
- 6) Un mobile se déplace le long d'une trajectoire parabolique d'équation : $y^2 = 2px$. Un autre mobile M_1 se déplace le long d'une autre trajectoire parabolique d'équation : $y^2 = 2p_1x$, ($p > p_1 > 0$) de façon que sa vitesse soit constamment parallèle à celle de M , on suppose de plus qu'à tout instant, le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ et le vecteur de accélération de M ont même projection orthogonale sur (Oy) . Déterminer les équations du mouvements de M sachant qu'à l'instant initial, M est en O et $\vec{V}_0 = v_0 \vec{j}$
- 7) Soient A et B deux points distincts de l'espace et T un torseur. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit la somme de deux glisseurs g_1 et g_2 dont les axes contiennent A et B respectivement.

Fin.