بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Nombres complexes*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

27 octobre 2008

Blague du jour :
Question : Que peut dire un homme réel à sa femme complexe ?
Réponse : Viens danser.

Mathématicien du jour : Gauss
Johann Carl Friedrich Gauss(1777-1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a été surnommé "le prince des mathématiciens". Considéré par beaucoup comme distant et austère, Gauss détestait enseigner et collabora rarement avec d'autres mathématiciens. Malgré cela nombreux de ses étudiant devinrent de grands mathématiciens, tel Bernhard Riemann. Gauss était profondément pieux et conservateur. Il soutint la monarchie et s'opposa à Napoléon. Il était issu d'un milieu modeste : grand-père paternel (paysan), grand-père maternel (tailleur de pierres) et père (jardinier). Il fut distingué par le Prix Lalande, (Académie des sciences, France, 1810) et la Médaille Copley (Société royale de Londres, 1838.)

Exercice 1 .

1) **Écrire $(1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n$. sous sa forme canonique, puis trouver ses racines cubiques de**
2) **Donner le module et l'Argument du complexe $\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2008}$.**
3) **Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $|z| = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.**
4) **Soit $z \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$.**
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$.

Exercice 2 .

1) **Trouver $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que :** $\begin{aligned} a+b+c &= 1 \\ abc &= 1 \end{aligned}$
2) **Intéprétez le résultat trouvé géométriquement.**

Exercice 3 . **Soient u, v, w trois complexes unitaires, de module égal à 1, tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u=jv=j^2w$ ou $u=jw=j^2v$.**

Exercice 4 .

1) **Soit $n\in\mathbb{N}, \theta\in\mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :**
$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{C}_k^n\cos(k\theta), S_2=\sum_{k=0}^{n}k\mathcal{C}_k^n\cos(k\theta) \text{ et } S_3=\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2}).}(-1)^k\mathcal{C}_{2k}^n$$
2) **Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}$. Simplifier les sommes :** $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(a+kb), \sum\limits_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$
En déduire la valeur de : $\cos(\frac{\pi}{11})+\cos(\dfrac{3\pi}{11})+\cos(\frac{5\pi}{11})+\cos(\dfrac{7\pi}{11})+\cos(\dfrac{9\pi}{11})$

Exercice 5 .

1) **Trouver une *CNS* sur les complexes *a, b, c* pour qu'ils soient les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.**
2) **D'un triangle équilatéral.**
3) **Trouver l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes**
   a) z, z^2, z^3 **soient alignés.**
   b) z, z^2, z^3 **soient sommets d'un triangle isocèle.**
   c) **1,** z, z^2, z^3 **soient cocycliques.**

Exercice 6 . **Identité du parallélogramme.**

1) **Soient $u, v\in\mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.**
2) **Donner son interprétation géométrique.**
3) **Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha|+|\beta|=|m+\mu|+|m-\mu|$.**

Exercice 7 . **Triangle équilatéral.**
Soient $a, b, c\in\mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\{a,b,c\}$ **est un triangle équilatéral.**
2) j **ou** j^2 **est racine de** $az^2+bz+c=0$.
3) $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.
4) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}=0$.

Exercice 8 . **Montrer que, pour tout nombre complexe z de module différent de 1 et tout entier naturel n, on a :** $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\leq\dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$

Exercice 9 . **Determiner tous les $z\in\mathbb{C}$ dont les racines cubiques z_1, z_2, z_3 verifient l'équation :** $z_1-z_2=\dfrac{1}{z_3}$.

Exercice 10 . **Soit $z\in\mathbb{C}$ et n un entier non nul. Montrer que :**
$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

Exercice 11 . **Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que : $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = nz^n$.
Montrer que $|z| \leq 1$.**

Exercice 12 **Soit $(\omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$ où $p \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^{n-1} \mathcal{C}_k^p \omega^{k+p}$.**

Exercice 13 .

1) **Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Vérifier que : $\left(|u|^2 - |v|^2\right)^2 = \left(\dfrac{|u+v|^2 + |u-v|^2}{2}\right)^2 - 4|uv|^2$.**
2) **Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Donner une CNS pour que les racines de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ aient même module.**

Exercice 14 **Soient $a, b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left(\dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a - b}\right)^2 \in \mathbb{R}$.**

Exercice 15 .

1) **On suppose que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{p=-k}^{k} e^{ipx} = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.**
2) **Calculer la valeur de cette somme pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.**

Exercice 16 **Simplifier $\displaystyle\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}$ en utilisant la relation : $p^3 - 1 = (p-1)(p-j)(p-j^2)$.**

Exercice 17 **.Orthocentre
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.**

1) **Montrer que si deux des rapports $\dfrac{d-a}{b-c}, \dfrac{d-b}{c-a}, \dfrac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.**
2) **En déduire que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point, appelé orthocentre.**

Exercice 18 **Construction du polygone régulier à l'aide de la règle et du compas :
On pose $w = e^{2i\frac{\pi}{5}}, a = w + w^4, b = w^2 + w^3$.**

1) **Montrer que *1+a+b=0* en déduire que *a* et *b* sont les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.**
2) **Donner *a* en fonction de $\cos(\frac{2\pi}{5})$, puis en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.**
3) **On note par $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$ les points d'affixes $(w^i)_{1 \leq i \leq 4}$ et *H* le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe *(ox)* montrer que $\overline{OH} = \dfrac{a}{2}$.**
4) **On note par *M* le point d'abscisse positive , point d'intersection de l'axe *(ox)* avec le cercle de centre *C (- $\frac{1}{2}$)* passant par *B(i)* montrer que $\overline{OM} = a$ et que *H* est le milieu de *[O , M]*.**
5) **En déduire une construction du pentagone régulier a l'aide de la règle et le compas.**

Fin.