Feuille d'exercices : *Courbes planes*

Prépas PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

1) On considère les deux ellipses : $(\xi) : \dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$ et $(\xi') : \dfrac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) A quelle condition une droite d'équation : $ux+vy+w=0$ est tangente à (ξ')

b) Pour tout point M de (ξ) on mène les deux tangentes a (ξ') qui recoupent (ξ) en P et Q montrer que la droite (PQ) est tangente à (ξ')(utiliser les coordonnées polaires)

2) Soit P la parabole d'équation : $y^2=2px$ $(p>0)$

a) Quel est l'ensemble (ξ) des points du plan par lesquels passent trois normales à la parabole

b) Quel est l'ensemble $(\xi')\subset(\xi)$ des points tel que deux parmi ces trois droites sont perpendiculaires

3) Soit D la droite de IR^3 passant par O et dirgiée par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$, S la surface obtenue par rotation de D autour de (Oz)

a) Donner une équation cartesienne de S

b) Déterminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ normal a S au point M de coordonnées (x,y,z), en quel point ce vecteur n'est-il pas défini ?

c) Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)=f(t)\cos(t)\\ y(t)=f(t)\sin(t)\\ z(t)=f(t)\end{cases}$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Montrer que S est tracée sur (γ)

d) Déterminer une équation du plan osculateur à (γ) au point de paramétre t sous la forme :
$(x-f(t)\cos(t))\,A(t)+(y-f(t)\sin(t))\,B(t)+(z-f(t))\,C(t)=0.$
Expliciter A,B,C en fonction $t,f,f\prime,f$“

e) On suppose que : $2ff$“ $-4f'^2-f^2=0$

i. Montrer alors ce plan contient la normale a S

ii. Intégrer cette équation en utilisant $g=\dfrac{1}{f}$

iii. En déduire une équation polaire de la projection (γ) de sur (xOy)

4) Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique définie par : $\begin{cases} x(t)=a(1+\cos(t))\\ y(t)=a\sin(t)\end{cases}$ tel que $a>0$

a) Reconnaitre la nature géometrique de (γ)

b) Soit (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a (γ). Donner une repésentation paramétrique de (Γ) .

c) En déduire une équation polaire de (Γ)

d) Soit M un point de (Γ) d'angle polaire θ, $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M à (Γ) orienté dans le sens des θ croissants,exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\tau}}\right)$

En déduire les poins de (Γ) où la tangente est verticale ou horizontale

e) Soit D_α la droite passant par O d'angle polaire $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

i. Montrer que D_α recoupe (Γ) en deux points M_α, M'_α

ii. Calculer la longueur du segment $[M_\alpha, M'_\alpha]$

iii. Déterminer le lieu H des milieux de $[M_\alpha, M'_\alpha]$ quand $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

iv. En déduire une construction géomterique des points M_α, M'_α

5) Soit (γ) arc géométrique plan tel que : $\forall M \in (\gamma)$ on a : l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où C est le centre de courbure de (γ) au point M

a) Si α désigne l'ange entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M montrer que : $x^2 + y^2 - \left(x\dfrac{dy}{d\alpha} - y\dfrac{dx}{d\alpha}\right)$.

b) Si θ désigne l'ange entre la droite (OM) et l'axe (Ox), β celui entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M,.
Montrer que : $\dfrac{d\theta}{da} \quad \tan(\beta) = \dfrac{r}{r'}$
On pourra utiliser les coordonnes polaires avec $r = OM$.

c) En déduire que (γ) est une spirale.

6) Soit (γ) l'arc géométrique plan définie par l'équation polaire :
$r(\theta) = \sin^n\left(\dfrac{\theta}{n}\right)$ tel que $n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta < n\pi$

a) calculer $||\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}||$.

b) En déduire que si β est l'angle entre la droite (OM) et la tangente à (γ) au point M alors : $\beta = \dfrac{\theta}{n}$.

c) En déduire l'angle α entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M, puis R le rayon de courbure.

d) Soit $M'e$ la projection orthogonale de C, centre de courbure de (γ) au point M, sur la droite (OM), montrer que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{n+1}$

7) Construire les courbes d'équation polaire :

a) $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1}$

b) $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $\rho(\theta) = \theta \sin(\theta)$

d) $\rho(\theta) = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$

e) $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$

f) $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$

8) Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique définie par :
$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos(t)} \\ y(t) = \sqrt{\sin(t)} \end{cases}$ tel que $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coincide avec l'origine

9) Déterminer les courbes pour lesquelles $\widehat{MOC} = \dfrac{\pi}{2}$ tel que C centre de courbure de la courbe au point M

10) Soit (γ) courbe plane parametrée de classe $\wp^3$, (γ_1) l'ensemble des points, C centres de courbure de (γ), et (γ_2) l'ensemble des milieux I des segments $[M, C_1]$
Montrer que la tangente à (γ_2) au point I est orthogonal à $\overrightarrow{MC_1}$

11) Soit (γ) une courbe plane parametrée de classe $\wp^1$, à tout point M de (γ) on associé H la projection orthogonale de O sur la tangente en M à (γ), et soit (γ_1) l'ensemble de ces projections.
Montrer que la normale à (γ_1) au point H passe par le milieu de $[O, M]$

$\boxed{\text{Fin.}}$