CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Dénombrement*

22 février 2009

Blague du jour :
Cinq chirurgiens prennent leur pause café.
Le premier chirurgien dit : « Les comptables sont les meilleurs à opérer parce que quand tu les ouvres, tout est numéroté à l'intérieur. »
Le deuxième chirurgien dit : « Non, c'est mieux les libraires. À l'intérieur, tout est classé en ordre alphabétique. »
Le troisième répond : « Essayez les électriciens les gars ! Tout leur intérieur est codé en couleur. »
Le quatrième intervient : « Moi je préfère les avocats. Ils sont sans coeur, sans âme, sans colonne vertébrale et leur tête est interchangeable avec les fesses. »
Le cinquième chirurgien, qui écoutait tranquillement la conversation dit : « J'aime les ingénieurs... Eux, ils comprennent quand il te reste des morceaux un peu partout à la fin. »

Mathématicien du jour ***Mobius***
August Ferdinand Möbius (1790-1868) fut un mathématicien et astronome théoricien à allemand.
Il est principalement connu pour sa découverte du ruban de Möbius, une surface non orientable à deux dimensions avec seulement un bord quand elle est plongée dans un espace euclidien à trois dimensions.
Möbius fut le premier à introduire les coordonnées homogènes en géométrie projective. Les transformées de Möbius, importantes en géométrie projective, qui ne doivent pas être confondues avec la transformation de la théorie des nombres qui porte aussi son nom. L'importante fonction $\mu(n)$ et la formule d'inversion de Möbius font partie de ses apports en théorie des nombres.
Möbius a eu Carl Friedrich Gauss comme professeur, et c'était un descendant du père du protestantisme, Martin Luther par sa mère.

Exercice 1 .

1) **Soit E un ensemble *E* à *n* éléments et A une partie de E fixe de cardinal p, combien peut-on former de parties X de E qui contiennent A ?**
2) **Sur un ensemble *E* à *n* éléments combien peut-on définir de relations binaires ?**
   Penser à la définition des relations binaires à l'aide des graphes .
3) **Parmi ces relations binaires combien sont-elles reflexives ?**
   Penser à la définition des relations binaires reflexives à l'aide des graphes et à utiliser la question (1) .
4) **Combien peut-on trouver de couples *(A,B)* de parties de *E* telles que $A \subset B$?**
5) **Combien peut-on trouver de couples *(A,B)* de parties de *E* telles que $A \cap B = \emptyset$?**

Exercice 2 . ***Lemme des tiroirs.***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$**,** E **un ensemble de cardinal** $n+1$**,** $(E_1, E_2, ..., E_n)$ **une partition de** E**. Montrer que** $\exists i \in [|1, n|]$ **tel que** $card(E_i) \geq 2$
Si on dispose de n tiroirs et n+1 objets alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets.

Exercice 3 .
Soit $n \in \mathbb{N}^*$**, de combien de façon on peut faire asseoir** ***n*** **hommes et** ***n*** **femmes numérotés autour d'une table ronde à** $2n$ **siéges non numérotés en repectant l'alternance homme-femme.**
Commencer d'abord par les cas simples $n = 1, n = 2, n = 3$ **avant de géneraliser.**

Exercice 4 . n***-mot de Gauss*** **:**
C'est un ***2n-uplet*** $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ **formé par des éléments de** $[|1, n|]$ **où chaque élément de** $[|1, n|]$ **apparait exactement 2 fois.**

1) **Trouver le nombre des** ***n-mot de Gauss*** **pour** ***n=1,n=2,n=3*** **.**
2) **Montrer que dans le cas général il y en a** $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ **.**

Exercice 5 .
Soient n, p **deux entiers tels que :** $0 \leq n \leq p$**.**
Montrer que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^p \quad &= 0 \qquad\qquad \textbf{si } p < n \\ &= (-1)^n n! \quad \textbf{si } p = n\end{aligned}$$

Exercice 6 .***Suite de Fibonacci*** **:**
On pose : $u_0 = u_1 = 1$ **et :** $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$**.**
Montrer que : $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n-p}{p}$

Exercice 7 . ***Formule d'inversion de Mobius***
Soit (x_n) **une suite de réels. On pose** $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$**.**
Montrer que $(-1)^n x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y_k$**.**

Exercice 8 .***Formule de Vandermonde***

1) **Soient** $a, b, c \in \mathbb{N}$**. Démontrer que :**

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$$

   a) **En calculant de deux manières** $(1+x)^a(1+x)^b$**.**
   b) **En cherchant le nombre de parties de cardinal** c **dans** $E \cup F$**, où** E **et** F **sont des ensembles disjoints de cardinaux** a **et** b**.**

2) **Application : Soient** $n, p, q \in \mathbb{N}$**. Montrer que :**
$\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{n}{p+k} = \binom{n+q}{p+q}$**.**

Exercice 9 . **Manipulation des** $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ **:**

1) **Quel est le coefficient de** $x^6y^4z^5$ **dans le développement de :** $(x+2y-3z)^{15}$ **?**
2) **En développant ou bien en dérivant** $(1+x)^n$ **calculer les sommes suivantes :**
$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $\sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$
3) **En calculant de deux façons la puissance de** x^n **dans l'expression :** $(1+x)^{3n} = (1+x)^n(1+x)^n(1+x)^n$**, démontrer que :** $\begin{pmatrix} 3n \\ n \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ n-p-k \end{pmatrix}$
4) a) **Montrer que :** $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\quad \sum_{k=0}^{p} k \begin{pmatrix} n \\ p-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 2n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$

   b) **En déduire :** $\sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$**.** ***Penser à utiliser*** $(1+x)^{2n}$ ***et sa derivée.***
5) a) **Montrer que :** $\forall (n,m,p) \in \mathbb{N}^3$
   $\sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ p-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+m \\ p \end{pmatrix}$.

   b) **En déduire la valeur de** $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$ **en fonction de** n**.**
6) **Soit** $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$**.**
   Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p+k \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$**.**
   Indication : Penser à une récurrence.

Exercice 10 . **Pour tout** $n, p \in \mathbb{N}$ **; on pose** $u_{n,p} = \dfrac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$

1) **Calculer** $u_{n+1,p} + u_{n,p+1}$.
2) **En déduire que** $u_{n,p}$ **est entier pour tout** n **et pour tout** p
3) **En déduire que** $\begin{pmatrix} n+p \\ n \end{pmatrix}$ **divise** $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}$

Exercice 11 . **(Oral Mines-Ponts, 2005)**
Soient n **et** k **deux entiers naturels non nuls. Déterminer le nombre de** k**-uplets tels que** $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ **; puis ceux tels que** $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_k \leq n$**.**

Exercice 12 .

1) **Montrer que** $\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}$.
2) **En déduire que :** $\dfrac{4^n}{2n} \leq \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leq 4^n$.

Fin
à la prochaine