Feuille d'exercices : *Dénombrement.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولَهُ وَ المُؤ مِنِين

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1. .

1) Soit E un ensemble ***E*** à ***n*** éléments et A une partie de E fixe de cardinal p, combien peut-on former de parties X de E qui contiennent A ?

2) Sur un ensemble ***E*** à ***n*** éléments combien peut-on définir de relations binaires ?

   Penser à la définition des relations binaires à l'aide des graphes .

3) Parmi ces relations binaires combien sont-elles reflexives ?

   Penser à la définition des relations binaires reflexives à l'aide des graphes et à utiliser la question (1) .

4) Combien peut-on trouver de couples ***(A,B)*** de parties de ***E*** telles que $A \subset B$?

5) Combien peut-on trouver de couples ***(A,B)*** de parties de ***E*** telles que $A \cap B = \emptyset$?

Exercice 2. ***Lemme des tiroirs :***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal $n+1$, $(E_1, E_2, ..., E_n)$ une partition de E. Montrer que $\exists i \in [|1, n|]$ tel que $card(E_i) \geq 2$
Si on dispose de n tiroirs et n+1 objets alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, de combien de façon on peut faire asseoir ***n*** hommes et ***n*** femmes numérotés autour d'une table ronde à $2n$ siéges non numérotés en repectant l'alternance homme-femme.
Commencer d'abord par les cas simples $n = 1, n = 2, n = 3$ avant de géneraliser.

Exercice 4. n***-mot de Gauss*** :
C'est un ***2n-uplet*** $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ formé par des éléments de $[|1, n|]$ où chaque élément de $[|1, n|]$ apparait exactement 2 fois.

1) Trouver le nombre des ***n-mot de Gauss*** pour ***n=1,n=2,n=3*** .

2) Montrer que dans le cas général il y en a $\dfrac{(2n)!}{2^n}$.

Exercice 5. Soient n, p deux entiers tels que : $0 \leq n \leq p$.
Montrer que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^p &= 0 && \text{si } p < n \\ &= (-1)^n n! && \text{si } p = n \end{aligned}$$

Exercice 6. ***Suite de Fibonacci :***
On pose : $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que : $u_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n-p}{p}$

Exercice 7. ***Formule d'inversion :***
Soit (x_n) une suite de réels. On pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.
Montrer que $(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y_k$.

Exercice 8. ***Formule de Vandermonde :***

1) Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$$

   a) En calculant de deux manières $(1+x)^a(1+x)^b$.
   b) En cherchant le nombre de parties de cardinal c dans $E \cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b.

2) Application : Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{n}{p+k} = \binom{n+q}{p+q}$.

Exercice 9. Manipulation des $\binom{n}{p}$:

1) Quel est le coefficient de $x^6y^4z^5$ dans le développement de : $(x+2y-3z)^{15}$?
2) En développant ou bien en dérivant $(1+x)^n$ calculer les sommes suivantes :
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.
3) En calculant de deux façons la puissance de x^n dans l'expression : $(1+x)^{3n} = (1+x)^n(1+x)^n(1+x)^n$, démontrer que : $\binom{3n}{n} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-p} \binom{n}{p}\binom{n}{k}\binom{n}{n-p-k}$.
4) Montrer que :
$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : \quad \sum_{k=0}^{p} k \binom{n}{p-k}\binom{n}{k} = n\binom{2n-1}{p-1}$
En déduire : $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.
Penser à utiliser $(1+x)^{2n}$ ***et sa derivée*** .
5) a) Montrer que : $\forall (n,m,p) \in \mathbb{N}^3$
$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$.
   b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ en fonction de n.
6) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.
Indication : Penser à une récurrence.

Fin.