.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours : ***Dérivées et Primitives***

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

9 octobre 2008

1 Notion de dérivée.

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

1.1 Généralités

Définition 1 **On dit que f est dérivable en a *si et seulement si* : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et soit finie on la note par $f'(a)$ et on l'appelle dérivée de f au point a.**

Proposition 1 **Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point ; la réciproque n'est pas toujours vraie.**

Remarque 1 .

1) **f est dérivable en a *si et seulement si* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et soit finie, dans ce cas $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.**
2) **Si f est dérivable en a, alors la courbe de f au point a admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.**
   En particulier si $f'(a) = 0$, alors la tangente est horizontale, et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, alors elle est verticale.

1.2 Dérivées classiques

Fonction	**Dérivée**	**Domaine**	**Fonction**	**Dérivée**	**Domaine**
$\cos$	$-\sin$	$\mathbb{R}$	$\sin$	$\cos$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1},,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$x > 0$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$

1.3 Opérations sur les dérivées

Dans cette partie on suppose f et g dérivables au point a, on a les résultats suivants :

1) **$f+g$ est dérivable en a avec $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.**
Dans le cas général, si $(f_k)_k$ est une famille finie de fonctions dérivables au point a, alors la somme $\sum\limits_k f_k$ est aussi dérivable au point a, avec

$$\left(\sum_k f_k\right)'(a)=\sum_k f_k'(a)$$

autrement dit on peut intervertir les signes somme finie et dérivée.

2) **fg est dérivable en a avec $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.**
Dans le cas général, si $(f_k)_k$ est une famille finie de fonctions dérivables au point a, alors le produit $\prod\limits_k f_k$ est aussi dérivable au point a, avec

$$\left(\prod_k f_k\right)'(a)=\sum_k f_k'(a)\prod_{i\neq k} f_i(a)$$

donc on ne peut pas intervertir les signes produit finie et dérivée.

3) **Si $f'(a)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a)=-\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$.**

4) **Si $f(a)\in I$ et si g est dérivable en $f(a)$ alors gof est dérivable en a avec $(gof)'(a)=f'(a)g'(f(a))$.**
En particulier si f est dérivable on a les résultats suivants :
$(f^n)'=nf'f^{n-1}$, $\quad \left(e^f\right)'=f'e^f$, $\quad (\ln f)'=\dfrac{f'}{\ln f}$.

5) **Si f est bijective et dérivable en a, alors f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$ avec $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.**

1.4 Extremum

Définition 2 .

1) **On dira que f admet un minimum global au point a *si et seulement si* $f(a)\leq f(x)$, $\forall x\in I$.**
2) **On dira que f admet un maximum global au point a *si et seulement si* $f(a)\geq f(x)$, $\forall x\in I$.**
3) **On dira que f admet au point a un extremum global, si elle y admet un minimum ou maximum global.**

Définition 3 .

1) **On dira que f admet un minimum local au point a *si et seulement si* $\exists\varepsilon>0$ tel que $f(a)\leq f(x)$, $\forall x\in I\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$.**
2) **On dira que f admet un maximum local au point a *si et seulement si* $\exists\varepsilon>0$ tel que $f(a)\geq f(x)$, $\forall x\in I\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$.**
3) **On dira que f admet au point a un extremum local, si elle y admet un minimum ou maximum local.**

Remarque 2 Un extremum global est local, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition 2 **Si f admet un extremum local ou global au point a, si f est dérivable au point a, et si a n'est pas une borne de l'intervalle I, alors $f'(a) = 0$.**

Remarque 3 .

1) **La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie, i.e. $f'(a) = 0 \not\Rightarrow f$ admet au point a un extremum.**
2) **Les trois conditions de la proposition précédente sont necessaire, si on enlève l'une d'elles, la dérivée n'est pas forcèment nulle.**

1.5 Dérivées successives

1.5.1 Généralités

Définition 4 .

1) **On dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' continue sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.**
2) **On dira que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ continue sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.**
3) **On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f $\mathcal{C}^n$ sur I, $\forall n \in \mathbb{N}$, autrement dit indifiniment dérivable, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.**

Remarque 4 **Avec les notations précèdentes, on a :**

1) **f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I \Longleftrightarrow f$ est continue sur I, autrement dit : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.**
2) **f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I \Longrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, donc $\mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.**
3) **$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.**

1.5.2 Dérivées classiques

À apprendre les dérivées suivantes :

1) $(e^x)^{(n)} = e^x$.
2) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
4) $(x^n)^{(k)} = \begin{array}{ll} \mathcal{A}_n^k x^{n-k} & \text{si } n \geq k \\ n! & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n > k \end{array}$
5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
6) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

1.5.3 Quelques caractérisations globales

Toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a les résultats suivants :

Théoréme 1 **f croissante sur I *si et seulement si* $f' \geq 0$ sur I.**

Remarque 5 **$f' > 0$ sur $I \Longrightarrow f$ strict. croissante sur I, la réciproque n'est pas toujours vraie. Toutefois si $f' > 0$ sur I sauf peut être en un nombre fini ou dénombrable de points, alors f est strict. croissante sur I**

Théoréme 2 f **convexe sur** I ***si et seulement si*** $f'' \geq 0$ **sur** I.

On rappelle qu'une fonction f **est dite convexe sur** I ***si et seulement si*** **elle vérifie la propriété suivante :**

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \forall t \in [0,1], \forall x, y \in I$$

2 Primitives

2.1 Généralités

Toutes les fonctions considérées sont continues sur $[a, b]$.

Définition 5 **On appelle primitive de** f **sur** $[a, b]$ **toute fonction** F **de classe** C^1 **sur** $[a, b]$ **telle que** $F' = f$.

Théoréme 3 **L'application** F **définie pour tout** $x \in [a, b]$ **par la relation** $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ **est l'unique primitive de** f **sur** $[a, b]$ **qui s'annulle en** a **et toute autre primitive** G **de** f **s'obtient à l'aide de la formule** $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt + G(a)$.

2.2 Propriétés de l'intégrale

- **Linéaire :** $\displaystyle\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$.
- **Positif :** $f \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- **Croissant :** $f \leq g \Longrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \leq 0 \int_{[a,b]}$.
- **Relation de CHASLES.** $\displaystyle\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]}$.
- $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$. **Inégalité de la moyenne.**

2.3 Technique de calculs

Toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$, **on a les résultats suivants :**

Théoréme 4 $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ **noté souvent** $[f]_a^b$.

Théoréme 5 **Intégration par parties :** $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$

Théoréme 6 **Changement de variable :** $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, **où** $u = \varphi(t)$.

Fin.