

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Prépas G.S HighTech, Rabat



Feuille d'exercices: *Déterminants d'ordre 2 et 3*

30 novembre 2008

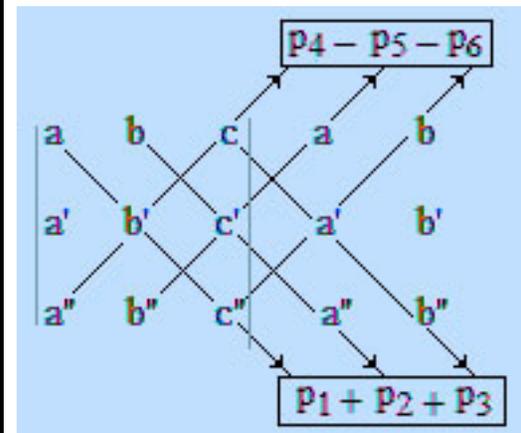
Preuves insolites : Montrer le résultat suivant : *Tous les chevaux sont de la même couleur.*

(Raisonement par récurrence : il est évident qu'un cheval est de la même couleur. Supposons vraie la proposition $P(k)$: k chevaux sont de la même couleur et utilisons-la pour démontrer que $k + 1$ chevaux sont de la même couleur. Etant donnés les $k + 1$ chevaux, retirons un cheval. Alors, d'après $P(k)$, les k chevaux restants sont de la même couleur. retirons un autre cheval et remplaçons le par le premier qui avait été retiré. Alors, d'après $P(k)$, les k chevaux sont de la même couleur. Répétons l'opération jusqu'à ce qu'on ait montré que les $k + 1$ ensembles de k chevaux sont de la même couleur, ce qui entraîne que chaque cheval est de la même couleur que chaque autre cheval.

Mathématicien du jour :

Sarrus

SARRUS Pierre Frédéric (1798-1861), mathématicien français. Il commença des études médecine qu'il abandonne au profit d'études de Mathématiques à Montpellier. Après son doctorat et l'agrégation de mathématiques, il sera professeur de sciences physiques à Perpignan (1827). Deux ans plus tard, il est nommé professeur à la faculté des sciences de Strasbourg. Il en sera le doyen en 1831 et recevra (1848) le prix de l'Académie des sciences pour son application aux intégrales multiples du calcul des variations dans la recherche d'extrema. Outre des travaux en astronomie, on le connaît surtout aujourd'hui pour sa célèbre règle et ses travaux en algèbre linéaire (systèmes d'équations linéaires) parallèlement à ceux de Cayley et Hamilton.



Exercice 1 Calculer les déterminants suivants, puis les écrire sous une forme factorisée

1) *Déterminant de Cauchy :*

$$C_n = \left| \frac{1}{a_i + b_j} \right|_{1 \leq i, j \leq 3}$$

a_i, b_i des réels donnés.

2) *Déterminant de Van Der Monde :*

$$V = \left| a_i^{j-1} \right|_{1 \leq i, j \leq 3}$$

où a_1, a_2, a_3 sont des réels donnés.

Exercice 2 Droites concourantes.

Dans le plan rapporté à un repère affine, on se donne 3 droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 d'équations respectives : $(\mathcal{D}_i) \quad \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$

On suppose qu'au moins deux des droites ne sont pas parallèles. Montrer que les trois droites sont concourantes si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 3 Coordonnées barycentriques.

Soit A, B, C trois points du plan non alignés. On se donne M_1, M_2, M_3 trois points du plan dont les coordonnées barycentriques dans le système (A, B, C) sont respectivement $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 4 Dérivation d'un déterminant.

1) Soient $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}. \text{ Montrer que } \Delta \text{ est dérivable et que :}$$

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ h'(x) & k(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ h(x) & k'(x) \end{vmatrix}.$$

2) Généraliser à un déterminant 3×3 .

3) Application : En déduire que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x + \alpha) & \sin(x + \alpha) \\ 1 & \cos(x + \beta) & \sin(x + \beta) \end{vmatrix} = \sin \alpha - \sin \beta - \sin(\alpha - \beta).$$

Exercice 5 Etudier l'existence de solutions des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1 \end{cases}$$

Indication : Discuter suivant les valeurs du paramètre m .

$$2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1) \end{cases}$$

Indication : Discuter suivant les valeurs des paramètres a, b, c, d .

$$3) \begin{cases} \frac{x}{1+a} + \frac{y}{1+2a} + \frac{z}{1+3a} = 1 \\ \frac{x}{2+a} + \frac{y}{2+2a} + \frac{z}{2+3a} = 1 \\ \frac{x}{3+a} + \frac{y}{3+2a} + \frac{z}{3+3a} = 1 \end{cases}$$

Indication : Utiliser la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{x}{X+a} + \frac{y}{X+2a} + \frac{z}{X+3a}.$$

Fin
à la prochaine