

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَ رَسُوْلُهُ وَ
الْمُؤْمِنُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

Feuille d'exercices: *Déterminants*

7 juin 2009

Mathématicien du jour

Sylvester

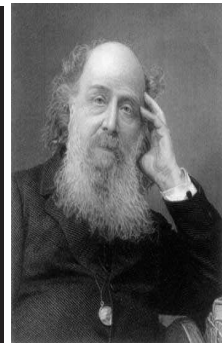
James Joseph Sylvester, mathématicien et géomètre anglais (1814-1897). Il a introduit en 1850 le terme de matrice, ainsi que la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.

Il a reçu la Royal Medal et la Médaille Copley. En 1901, la Médaille Sylvester de la Royal Society a été créée en son honneur.

Blague du jour :

Une jeune fille qui explique à ses parents, qu'il ne va épouser qu'un archéologue.

- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.



Exercice 1 . Changements de signe.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = ((-1)^{i+j}a_{ij})$. Montrer que $\det A = \det B$.

Exercice 2 . Matrice de Van Der Monde.

Soient a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts, on pose $V(a_1, \dots, a_n) = (a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $P(X) = \det(V(a_1, \dots, a_{n-1}, X))$.

1) Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Indication : Développer le déterminant suivant le dernière colonne.

2) Préciser son coefficient dominant.

3) Calculer $P(a_i)$.

4) En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.

5) Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde $(a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

6) A quelle condition la matrice est inversible.

Exercice 3 . Formule d'intégration numérique et matrice de Van Der Monde :

1) Soit a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts, a, b deux réels donnés. Montrer que : $\exists(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\int_a^b P(t)dt = \sum_{k=1}^n x_k P(a_k)$.

2) Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré ≤ 2 on ait : $\int_2^4 P(t)dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$.

Exercice 4 . Matrice de Van Der Monde et polynômes d'interpolation de Lagrange.

Soient a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

$\mathcal{B}_1 = (1, X, \dots, X^{n-1}); \mathcal{B}_2 = (L_1, \dots, L_n)$.

- 1) Calculer $L_i(a_j)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
- 2) En déduire que \mathcal{B}_2 est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, appelée la base d'interpolation de Lagrange aux points a_1, \dots, a_n .

- 3) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]; P(X) = \sum_{k=1}^n P(a_k)L_k(X)$.

- 4) En déduire que $P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = V(a_1, \dots, a_n)$.
Conclure $V(a_1, \dots, a_n)$ est inversible.

- 5) On pose $M = V(a_1, \dots, a_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et

$$P(X) = \sum_{k=1}^n x_k X^{k-1}.$$

- a) Montrer que $MX = 0 \iff P(a_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$.
- b) En déduire que $V(a_1, \dots, a_n)$ est inversible.
- 6) Écrivez le déterminant : $\det(\cos((j-1)\theta_i)_{1 \leq i, j \leq n})$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Exercice 5 . Calculer les déterminants suivants, en essayant de trouver des relations de récurrence.

On pourra suivre les indications données pour chaque matrice.

$$1) \text{ Déterminant tridiagonale : } \Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

a, b des réels fixes.

Indication : Développer suivant le 1ère ligne ou 1ère colonne

- 2) Déterminant de Cauchy :

$$C_n = C(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \left| \frac{1}{a_i + b_j} \right|_{1 \leq i, j \leq n}$$

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels donnés.

Indication : Utiliser les opérations élémentaires suivantes : $L_i \rightarrow L_i - L_1$, pour tout $2 \leq i \leq n$.

- 3) Déterminant de Van Der Monde :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \left| a_i^{j-1} \right|_{1 \leq i, j \leq n}$$

a_1, \dots, a_n des réels donnés.

Indication : Utiliser les opérations élémentaires suivantes : $C_n \rightarrow C_n - a_1 C_{n-1}, \dots, C_2 \rightarrow C_2 - a_1 C_1$.

Exercice 6 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1) **Démontrer que :** $\det(A + \alpha U) = \det A + \alpha \sum \text{cofacteurs de } A$.

2) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose : $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,

a) **Montrer que :** $D(a - b, 0, c - b) = (a - b)^n$
 $D(a - c, b - c, 0) = (a - c)^n$

b) **On suppose que $b \neq c$, montrer que :**

$$D(a, b, c) = \frac{c(a - b)^n - b(a - c)^n}{c - b}.$$

c) **On suppose que $b = c$, montrer que :**

$$\det((a - b)I + bU) = (a - b)^n + nb(a - b)^{n-1}.$$

Exercice 7 . Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 & x \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots & x^2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} p \\ p-1 \\ p+1 \\ p-1 \end{pmatrix} & x^p \\ \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} p \\ p-1 \\ p+1 \\ p-1 \end{pmatrix} & x^{p+1} \end{vmatrix}$$

1) **Préciser le nombre de lignes et de colonnes de $\varphi_p(x)$.**
Calculer $\varphi_p(x + 1) - \varphi_p(x)$.

2) **En déduire que $\varphi_p(n + 1) = (p + 1)! \sum_{k=1}^n k^p$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**

3) **En déduire les valeurs des sommes suivantes :**

$$\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2 \text{ et } \sum_{k=1}^n k^3.$$

Exercice 8 .

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. **Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.**
Indication : Penser à travailler dans \mathbb{C} .

2) **Chercher A, B ne commutant pas telles que $\det(A^2 + B^2) < 0$.**

Indication : Utiliser : $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$

Exercice 9 . Sommes des autres colonnes.

Soit M une matrice carrée d'ordre n , et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j , la j -ième colonne par la somme des autres colonnes de M

Montrer que $\det M' = (-1)^{n-1}(n - 1) \det M$.

Exercice 10 . Racines de l'unité.

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$ et D le déterminant $n \times n$:

$$D = \det \left(M = \left(\omega^{(k-1)(j-1)} \right)_{1 \leq k, j \leq n} \right).$$

1) Calculer $M\overline{M}$, en déduire que M est inversible, puis donner son inverse.

2) Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, calculer $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj}$

3) En déduire la matrice M^2 , puis que $D^2 = \varepsilon n^n$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

4) Montrer que $D = \prod_{j < k} (\omega^k - \omega^j) = \prod_{j < k} \left(\alpha^{j+k} \cdot 2i \sin \frac{k-j}{n} \pi \right)$.

5) En déduire que $D = n^{n/2} \exp \left(i \frac{\pi}{4} (n-1)(3n+2) \right)$.

Exercice 11 . Autour de la Comatrice.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

a) On suppose que A est inversible.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, associé à A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

i. Montrer que $f(F_k) = F_k$.

ii. En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.

iii. En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.

iv. En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

b) On suppose que A est non inversible.

Soit $\alpha = \min\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \text{ valeur propre non nulle de } A\}$

i. Montrer que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.

ii. En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de $\text{com}(A)$ en fonction du rang de A . Montrer

$$\begin{aligned} \text{que : } \text{rg}(\text{com}(A)) &= n & \text{si } \text{rg}(A) &= n \\ \text{rg}(\text{com}(A)) &= 1 & \text{si } \text{rg}(A) &= n-1 \\ \text{rg}(\text{com}(A)) &= 0 & \text{si } \text{rg}(A) &\leq n-2 \end{aligned}$$

3) Calculer $\text{com}(\text{com}(A))$ dans le cas où A est inversible.

4) Si $\text{rg} A \leq n-2$, démontrer que $\text{com} A = 0$.

5) Si $\text{rg} A = n-1$, montrer que $\text{com} A = U^t V$, où $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6) Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $\text{com}(I_n)$ et $\text{com}(\lambda A)$.

b) Si A et B sont inversibles, démontrer que

$$\text{com}(AB) = (\text{com} A)(\text{com} B) \text{ et } \text{com}(A^{-1}) = \text{com}(A)^{-1}.$$

c) Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.

d) En déduire que si A et B sont semblables, alors $\text{com} A$ et $\text{com} B$ le sont.

Fin
à la prochaine