Feuille d'exercices : *Déterminants. Systèmes linéaires.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Calculer les déterminants suivants, en essayant de trouver des relation de récurrence.*
On pourra suivre les indications données pour chaque matrice.

1) ***Déterminant tridiagonale :*** $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}$

   a, b des réels fixes.
   Indication : Développer suivant le 1ère ligne ou 1ère colonne

2) ***Déterminant de Cauchy :***

$$C_n = C(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \left| \frac{1}{a_i + b_j} \right|_{1 \le i,j \le n}$$

   $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels donnés.
   Indication : Utiliser les opérations élémentaires suivantes : $L_i \longrightarrow L_i - L_1$, pour tout $2 \le i \le n$.

3) ***Déterminant de Van Der Monde :***

$$V(a_1, \dots, a_n) = \left| a_i^{j-1} \right|_{1 \le i,j \le n}$$

   $a_1, \dots, a_n$ des réels donnés.
   Indication : Utiliser les opérations élémentaires suivantes : $C_n \longrightarrow C_n - a_1 C_{n-1}, \dots, C_2 \longrightarrow C_2 - a_1 C_1$.

Exercice 2. ***Matrice de Van Der Monde.***
Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts, on pose $V(a_1, \dots, a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1 \le i,j \le n}$ et $P(X) = \det\left(V(a_, \dots, a_{n-1}, X\right)$.

1) *Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.*
   Indication : Développer le déterminant suivant le dernière colonne.
2) *Préciser son coefficient dominant.*
3) *Calculer $P(a_i)$.*
4) *En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.*
5) *Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde $\left(a_i^{j-1}\right)_{1 \le i,j \le n}$*
6) *A quelle condition la matrice est inversible.*

Exercice 3. ***Formule d'intégration numérique et matrice de Van Der Monde :***

1) *Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts, a, b deux réels donnés. Montrer que :*

$$\exists (x_, \dots, x_n) \text{ tel que } \int_a^b P(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} x_k P(a_k).$$

2) *Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré ≤ 2 on ait : $\displaystyle\int_2^4 P(t)dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$.*

Exercice 4. ***Matrice de Van Der Monde et polynômes d'interpollation de Lagrange.***
Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout $1\le i\le n$, on pose $L_i(X)=\displaystyle\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$

$\mathcal{B}_1=(1,X,\dots,X^{n-1});\mathcal{B}_2=(L_1,\dots,L_n)$.

1) *Calculer $L_i(a_j)$ pour tout $1\le i,j\le n$.*
2) *En déduire que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, appelée la base d'interpolation de Lagrange aux points $a_1,\dots,a_n$.*
3) *Montrer que* $\forall\, P\in\mathbb{R}_{n-1}[X];\quad P(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(a_k)L_k(X)$.
4) *En déduire que $P_{\mathcal{B}_2\longrightarrow\mathcal{B}_1}=V(a_1,\dots,a_n)$.*
Conclure $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible .
5) *On pose $M=V(a_1,\dots,a_n)$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, et*

$$P(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kX^{k-1}.$$

   a) *Montrer que $MX=0\iff P(a_i)=0,\forall\,1\le i\le n$.*
   b) *En déduire que $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible.*
6) *Écrivez le déterminant :* $\det\Big(\cos((j-1)\theta_i)_{1\le i,j\le n}\Big)$ *sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.*

Exercice 5. *Soit (S) : $AX=b$ où $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.*

Exercice 6. ***Changements de signe.***
Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=((-1)^{i+j}a_{ij})$.
Montrer que $\det A=\det B$.

Exercice 7. *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et* $U=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\dots&1\end{pmatrix}$.

1) *Démontrer que :* $\det(A+\alpha U)=\det A+\alpha\sum$ *cofacteurs de A.*
2) *Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on pose :* $D(a,b,c)=\begin{vmatrix}a&b&\dots&b\\ c&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&b\\ c&\dots&c&a\end{vmatrix}$,
   a) *Montrer que :* $D(a-b,0,c-b)=(a-b)^n$
   $D(a-c,b-c,0)=(a-c)^n$
   b) *On suppose que $b\ne c$, montrer que :*
   $D(a,b,c)=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$.
   c) *On suppose que $b=c$, montrer que :*
   $\det((a-b)I+bU)=(a-b)^n+nb(a-b)^{n-1}$.

Exercice 8. ***Racines de l'unité.***
On note $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\alpha=e^{\frac{i\pi}{n}}$ et D le déterminant $n\times n$:
$D=\det\left(M=\left(\omega^{(k-1)(j-1)}\right)_{1\le k,j\le n}\right)$.

1) *Calculer $M\overline{M}$, en déduire que M est inversible, puis donner son inverse.*
2) *Pour tout $0\le k\le n-1$, calculer* $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{kj}$
3) *En déduire la matrice M^2, puis que $D^2=\varepsilon n^n$, avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$.*
4) *Montrer que* $D=\displaystyle\prod_{j<k}(\omega^k-\omega^j)=\prod_{j<k}\left(\alpha^{j+k}\cdot 2i\sin\frac{k-j}{n}\pi\right)$.
5) *En déduire que* $D=n^{n/2}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Exercice 9. .

1) *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
Indication : Penser à travailler dans $\mathbb{C}$.

2) *Chercher* A, B *ne commutant pas telles que* $\det(A^2 + B^2) < 0$.
Indication : Utiliser : $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. ***Droites concourantes.***
Dans le plan rapporté à un repère affine, on se donne 3 *droites* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ *et* $\mathcal{D}_3$ *d'équations respectives :* $(\mathcal{D}_i) \quad \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$
On suppose qu'au moins deux des droites ne sont pas parrallèles. Montrer que les trois droites sont concourantes si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 11. ***Coordonnées barycentriques.***
Soit A, B, C *trois points du plan non alignés. On se donne* M_1, M_2, M_3 *trois points du plan dont les coordonnées barycentriques dans le système* (A, B, C) *sont respectivement* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ *et* $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.
Montrer que M_1, M_2 *et* M_3 *sont alignés si et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 12. ***Sommes des autres colonnes.***
Soit M *une matrice carrée d'ordre* n, *et* M' *la matrice déduite de* M *en remplaçant, pour tout* j, *la* j*-ième colonne par la somme des autres colonnes de* M
Montrer que $\det M' = (-1)^{n-1}(n-1)\det M$.

Exercice 13. ***Dérivation d'un déterminant.***

1) *Soient* $f, g, h, k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions dérivables et*
$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$. *Montrer que* Δ *est dérivable et que :*
$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ h'(x) & k(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ h(x) & k'(x) \end{vmatrix}$.

2) *Généraliser à un déterminant* $n \times n$.

3) *Application : En déduire que :*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} = \sin\alpha - \sin\beta - \sin(\alpha - \beta).$$

Exercice 14. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *on pose :*

$$\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & \dots & 0 & x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & x^2 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \binom{p}{p-1} & x^p \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$$

1) *Préciser le nombre de lignes et de colonnes de* $\varphi_p(x)$.
Calculer $\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x)$.

2) *En déduire que* $\varphi_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

3) *En déduire les valeurs des sommes suivantes :*
$\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2$ *et* $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 15. ***Autour de la Comatrice.***

1) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.*

a) *On suppose que A est inversible.*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, associé à A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on pose $F_k = Vect(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

i. *Montrer que $f(F_k) = F_k$.*

ii. *En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.*

iii. *En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.*

iv. *En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.*

b) *On suppose que A est non inversible.*
Soit $\alpha = \min\{|\lambda|$ tel que λ valeur propre non nulle de $A\}$

i. *Montrer que $\forall\, 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.*

ii. *En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.*

2) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de $com(A)$ en fonction du rang de A. Montrer que :*
$$\begin{array}{lll} rg(com(A)) = n & si & rg(A) = n \\ rg(com(A)) = 1 & si & rg(A) = n-1 \\ rg(com(A)) = 0 & si & rg(A) \leq n-2 \end{array}$$

3) *Calculer $com\,(com\,A)$ dans le cas où A est inversible.*

4) *Si $rgA \leq n-2$, démontrer que $com\,A = 0$.*

5) *Si $rgA = n-1$, montrer que $com\,A = U\,{}^tV$, où $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

6) *Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

a) *Calculer $com\,(I_n)$ et $com\,(\lambda A)$.*

b) *Si A et B sont inversibles, démontrer que*
$com\,(AB) = (com\,A)(com\,B)$ et $com\,(A^{-1}) = com\,(A)^{-1}$.

c) *Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A - \varepsilon I$ et $B - \varepsilon I$ soient inversibles.*

d) *En déduire que si A et B sont semblables, alors $com\,A$ et $com\,B$ le sont.*

Exercice 16. *Etudier l'existence de solutions des systèmes suivants :*

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right.$

Indication : Discuter suivant les valeurs du paramétre m .

2) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a(a-1)x & + & b(b-1)y & + & c(c-1)z & = & d(d-1) \end{array}\right.$

Indication : Discuter suivant les valeurs des paramétres a, b, c, d.

3) $\left\{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{x}{1+a} & + & \dfrac{y}{1+2a} & + & \dfrac{z}{1+3a} & = & 1 \\ \dfrac{x}{2+a} & + & \dfrac{y}{2+2a} & + & \dfrac{z}{2+3a} & = & 1 \\ \dfrac{x}{3+a} & + & \dfrac{y}{3+2a} & + & \dfrac{z}{3+3a} & = & 1 \end{array}\right.$

Indication : Utiliser la fraction rationnelle :
$F(X) = \dfrac{x}{X+a} + \dfrac{y}{X+2a} + \dfrac{z}{X+3a}$.

Exercice 17. *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires linéairement indépendantes sur un $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie, et φ une autre forme linéaire.*

1) *Montrer que : φ est combinaison linéaire de $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i) \subset Ker(\varphi)$.*

Indication : Étudier le système $\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_1(x) & = & 0 \\ \quad\vdots & & \\ \varphi_n(x) & = & 0 \\ \varphi(x) & = & 1 \end{array}\right.$

2) *Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ libre ?*

Fin.