Feuille d'exercices : *Espaces affines*

Prépas PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Dans tous les énoncés ξ désigne le plan ou l'espace réel.

1) A, B, A', B' quatre points de ξ tel que $A \neq A', B \neq B'$.
Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation qui transforme A en A' et B en B' $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ proportionnels.

2) On suppose que ξ est de dimension 3.

a) Montrer que deux droite de ξ sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

b) Soit D_1 et D_2 les droites d'équations :

$$D_1 : \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = z-1 \end{cases} \quad , \quad D_2 : \begin{cases} x = z+2 \\ y = 3z-3 \end{cases}$$

Montrer qu'ils sont coplanaires et former une équation cartésienne du plan les contenants.

3) On considère dans $\mathbb{R}^3$ muni de sont repère canonique :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, D : \begin{cases} z = 0 \\ 2x+3y = 1 \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} y = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une unique droite D passant par A et rencontrant D et D', puis donner une équation cartésienne .

4) Soit :

$$D : \begin{cases} x = z-1 \\ y = 2z+1 \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}$$

.
Montrer qu'il existe un unique couple de plans (P, P') tel que :
$D \subset P, D' \subset P'$ et $P//P'$.
Former une équation cartésienne de P et P'.

5) Déterminer la projection de la droite $D : \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-2y-z = 0 \end{cases}$ sur le plan d'équation $P : x+2y+3z = 6$ parallèlement à la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$.

6) Reconnaître l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a pour expression analytique dans le repère canonique :

$$\begin{cases} x' = 3x+4y+2z-4 \\ y' = -2x-3y-2z+4 \\ z' = 4x+8y+5z-8 \end{cases}$$

Montrer que c'est une affinité et donner son axe, son rapport et sa direction).

7) D_1, D_2, D_3 trois droites du plan d'équations cartesiennes dans un répere quelconque : $a_i x + b_i y + c_i = 0, i = 1, 2, 3$.

a) Montrer qu'elles sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) **Application :** *Théorème de Céva :*
Soit (ABC) un triangle ; $R \in (AB)\,, P \in (BC)\,, Q \in (CA)$
Déduire que $(AP)\,,(BQ)\,,(CR)$ sont concourantes $\Leftrightarrow$ $\overline{PB}.\overline{QC}\,.\overline{RA} = -\overline{PC}\,.\overline{QA}\,.\overline{RB}$
(*indication :* On pourra travailler dans le repère : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

8) Soit (ABC) un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[B,C], [A,C], [A,B]$ et G le centre de gravité de ABC.
Soit M un point du plan, on note P, Q et R ses symétrique par rapport à A', B', C' , et K le centre de gravité de (PQR).
Montrer que :

a) G est le milieu de $[M,K]$.

b) $[A,P], [B,Q], [C,R]$ et $[G,K]$ ont le même milieu .

9) (ABC) un triangle, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c \neq -1$, on note f l'application du plan dans lui même qui au point M associe le point $M' = Barycentre\,((A,a),(B,b),(C,g),(M,1))$.
Montrer que f une application affine, puis que c'est soit une translation soit une homothétie.

10) f est un endomorphisme affine du plan tel que pour tout point M on a $f^2(M)$ est le milieu de $[M, f(M)]$.
Montrer que f est une affinité, quel est sont rapport ?

11) C_1, C_2 deux ensembles convexes du plan, montrer que l'ensemble des segments $[M_1, M_2]$ tel que : $(M_1, M_2) \in C_1 \times C_2$, est convexe.

12) Soient D et D' deux droites affines de l'espace et π un plan tels que π n'est parallèle ni à D ni à D'.
On note par q la projection sur π parallèlement à D et par p la projection sur π parallèlement à D'.
Soit $\lambda \in]0,1[$ on définit l'application affine f par : $f(M) = Barycentre\,(p(M)\,(\lambda)\,, q(M)\,(1-\lambda))$.

a) Montrer que $\overrightarrow{p}\,o\,\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}\,o\,\overrightarrow{p} = \overrightarrow{q}$
(indication : on pourra travailler sur une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ choisie telle que : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ base de $\overrightarrow{\pi}$ et $\overrightarrow{e_3}$ qui dirige D.

b) Montrer $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$

c) En déduire que f est une projection.

d) Montrer que f est la projection sur π parallèlement à la droite Δ passant par le point $C = Barycentre\,(A\,(\lambda)\,, B\,(1-\lambda))$ où $\{A\} = D \cap \pi$, $\{B\} = D' \cap \pi$ et dirigée par le vecteur $\lambda\overrightarrow{e_3} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{e_3})$

e) Application numérique : calculer $f(M)$ si M est de coordonnes $(1,-1,1)$ dans le repère cartésien canonique si $\pi : x+2y-3z = 1$, D passe par $M_1(1,0,1)$ dirigée par $\vec{u} = \vec{i}+\vec{k}$ et D passe par $M_2(-1,1,1)$ dirigée par $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et et $f : \xi \to \xi$ affine

a) Montrer que : $\forall A \in \xi, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\xi}$ on a : $f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{u})$

b) En déduire qu'une application, f commute avec une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ *si et seulement si* $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.

c) trouver une CNS sur $\overrightarrow{u}$ pour que $t_{\overrightarrow{u}}$commute avec une :

i. homothétie

ii. symétrie

iii. projection

14) a) Donner les équations cartésiennes de la droite $D = (AB)$ et du plan $\pi = (ACD)$
où $A = (1,2,-1), B = (1,0,2), C(2,-4,3)$ et $D(-2,-1,0)$.

b) Donner l'expression analytique de $s = s_{p//D}$ dans le repère canonique

c) Calculer $s(M)$ avec $M = (1,1,1)$

d) on pose $\Re' = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ Donner l'expression analytique de $s = s_{p//D}$ dans le repère $\Re'$.

e) Donner les coordonnes de M dans $\Re'$.

f) Enoncer le théorème de changement de repère et vérifier qu'il est bien vrai sur cet exemple.

g) Reconnaître $f = h_{A,-2}ot_{\overrightarrow{AB}}$ puis calculer $f(M)$.

Fin.