Feuille d'exercices : *Ensembles. Applications.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *mamouni.myismail@gmail.com*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولَهُ وَ المُؤ مِنِين

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

***Exercice* 1. Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E donnés.**
Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations :
– $A \cap X = B$.
– $A \Delta X = B$.

***Exercice* 2. Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E.**
Soit $\phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$

1) **Qu'est-ce que $\phi(\emptyset)$? $\phi(E \setminus (A \cup B))$?**
2) **A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?**
3) **Est-ce que le couple $(\emptyset, B)$ possède un antécédent par ϕ ?**
4) **A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?**

***Exercice* 3. Montrer que la relation définie sur $N^* \times \mathbb{N}^*$ par : $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longleftrightarrow (a$ divise c, d divise $b)$ est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle ? Donner tous les majorants et minorants de $(4, 12)$.**

***Exercice* 4. .**

1) **Soit $n \in \mathbb{N}$, $A = \left\{ k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \dfrac{k(k+1)}{2} \leq n \right\}$ et $s = \max A$. Dire pourquoi s existe.**
2) **Montrer que $\dfrac{s(s+1)}{2} \leq n < \dfrac{(s+1)(s+2)}{2}$.**
3) **En déduire que l'application : $f \begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & a + \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} \end{array}$ est bijective.**
4) **En déduire que la relation définie sur $N^* \times \mathbb{N}^*$ par :**
$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longleftrightarrow a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} \leq c + \frac{(c+d)(c+d+1)}{2}$$
est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle ? Donner tous les majorants et minorants de $(4, 12)$.
5) **Donner les 5 premiers éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour cette relation d'ordre.**

Exercice 5. Congruence des carrés modulo 5.
On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \sim y \Longleftrightarrow x^2 \equiv y^2 \quad [5]$.

1) **Déterminer l'ensemble quotient.**
2) **Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?**

Exercice 6. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1) **Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.**
2) **Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.**
3) **Comparer $f(A \,\Delta\, A')$ et $f(A) \,\Delta\, f(A')$.**
4) **Comparer $f^{-1}(B \,\Delta\, B')$ et $f^{-1}(B) \,\Delta\, f^{-1}(B')$.**
5) **Montrer que f injective $\Longrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.**
6) **Montrer que f surjective $\Longrightarrow \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.**
7) **A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\ A \subset E,\ \ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?**

Exercice 7. Soient E, F, G des ensembles, $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$.
Montrer que :

1) **$g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.**
2) **$g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.**
3) **$g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\Rightarrow g$ et h bijectives.**
4) **$g \circ f \circ h$ et$f \circ h \circ g$ injectives et $h \circ g \circ f$ surjectives $\Rightarrow g$ et h bijectives.**
5) **$g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ surjectives et $h \circ g \circ f$ injectives $\Rightarrow g$ et h bijectives.**

Exercice 8. Soient deux relations d'équivalence : $\mathcal{R}$ sur E, et $\mathcal{S}$ sur F. On définit sur $E \times F$:

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{S}y'.$$

1) **Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.**
2) **Soit** $\phi : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & (E/\mathcal{R}) \times (F/\mathcal{S}) \\ (x, y) & \longmapsto & (\dot{x}, \dot{y}) \end{array}$
   Démontrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice 9. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathcal{P}(E)$:

$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

1) **Montrer que c'est une relation d'équivalence.**
2) **Soit** $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ X & \longmapsto & X \setminus A \end{array}$
   Montrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice 10. Partie stable par une application.
Soit $f : E \longrightarrow E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$. Pour tout $A \subset E$, on pose : $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1) **Montrer que $f(B) \subset B$.**
2) **Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.**

$\mathcal{E}$xercice 11. Parties saturées pour une relation d'équivalence.
Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.
Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.

1) **Comparer A et $s(A)$.**
2) **Simplifier $s(s(A))$.**
3) **Montrer que : $\forall\, x \in E$, on a $(x \in s(A)) \Longleftrightarrow (\dot{x} \cap s(A) \neq \emptyset)$. En déduire $s(E \setminus s(A))$.**
4) **Démontrer que $s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} s(A_i)$.**
5) **Donner un exemple d'inclusion stricte.**

$\mathcal{E}$xercice 12. Soit E un ensemble et
$\mathcal{E} = \{(A, f)$ tq $A \subset E,\ A \neq \emptyset$, et $f \in E^A\}$. On ordonne $\mathcal{E}$ par :

$$(A, f) \preceq (B, g) \Longleftrightarrow \begin{array}{l} A \subset B \\ \forall\ x \in A,\ f(x) = g(x) \end{array}$$

(c'est-à-dire que la fonction g, définie sur B, prolonge la fonction f, définie seulement sur A).

1) **Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?**
2) **Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de $\mathcal{E}$. Trouver une CNS pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?**
3) **Même question avec minorée.**

$\mathcal{E}$xercice 13. Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et $\mathcal{S} = \{X \subset E$ tq $f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1) **Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.**
2) **Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.**
3) **Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \emptyset$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.**
4) **Soient X et $Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathcal{S}$.**
5) **Montrer que l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{P}(f(E)) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ est une bijection.**

$\boxed{\text{Fin.}}$