بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Équations différentielles*

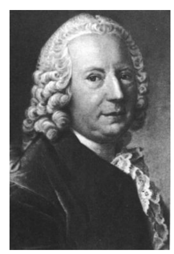
HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

2 novembre 2008

Blague du jour :
Une logicienne vient d'avoir un enfant. Une de ses amies lui téléphone, et lui demande : C'est une fille ou un garçon ? Oui, répond la logicienne.


Jacques


Jean


Daniel

Mathématiciens du jour : Les Bernouilli
Les Bernoulli qui se sont illustrés dans les mathématiques et la physique, sont issus de Nicolas Bernoulli (1623-1708), descendant d'une famille ayant émigré de Belgique en Suisse à la fin du XVIe siècle. Les représentants les plus connus de cette famille sont : Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas, et Daniel (1700-1782), son petit-fils.
• Jacques posa les principes du calcul des probabilités et introduit les nombres de Bernoulli. Sa correspondance avec Gottfried Leibniz le conduit à étudier le calcul infinitésimal en collaboration avec son frère Jean. Il fût membre de l'Academdie des sciences de Paris en 1699.
• Jean fût membre des Académies de Paris, de Londres, de Berlin et de Saint-Pétersbourg et de la Royal Society. Formé par son frère Jacques Bernoulli, il avait longtemps travaillé de concert avec lui, mais il s'établit ensuite entre eux une rivalité qui dégénéra en inimitié. Il la gloire de former Leonhard Euler et était trés ami avec L'Hôpital.
• Daniel fût un médecin, physicien et mathématicien. Il enseigna mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique. Il était trés ami avec Lehonard Euler. Il collabore également avec Jean le Rond d'Alembert.

Exercice 1 **Résoudre les équation différentielles suivantes :**

1) $2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$.

2) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

3) $(x \ln x)y' - y = -\dfrac{\ln x + 1}{x}$

4) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$

5) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

6) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

7) $2xy' + y = x^n \quad n \in \mathbb{N}$

8) $(1-x^2)y' + xy = \dfrac{2x}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

9) $xy' + 2y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

10) $(1-x^2)y' - xy = 1$.

11) $\left(x^2 - 4\right) y' + (1-x)\, y = 1$.

12) $y' \sin(x) - y \cos(x) = e^x \sin^4(x)$

Exercice 2 **Équation d'Euler.**
Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle :

$$\forall t \in I \quad at^2 y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0$$

1) **On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}_+^*$.**

a) **En posant $z(t) = ye^t$, montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.**

b) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

2) **Résoudre E dans le cas où $I = \mathbb{R}_-^*$.**

3) **Résoudre l'équation différentielle :**

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2 y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$$

Exercice 3 **Equation de Bernouilli.**
Elle est de la forme : $y = ya(x) + y^\alpha b(x)$, pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $z = y^{1-\alpha}$. on se raméne alors à une équation linéaire du 1^{er} ordre.
Résoudre :

1) $x^2 y' + y + y^2 = 0$.

2) $y' + xy = x^3 y^3$.

Exercice 4 **Equation de Ricatti.**
Elle est de la forme : $y = y^2 a(x) + yb(x) + c(x)$; pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $y = y_0 + z$ où y_0 solution particuliére à trouver, on se raméne alors à une équation de Bernouilli.
Résoudre :

1) $\left(1 + x^3\right) y' = y^2 + x^2 y + 2x$.

2) $y' + y^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

Exercice 5 **Equations fonctionnelles.**
Trouver les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1) $2\displaystyle\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
2) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}\left(f(x) + 2f(0)\right)$.
3) **Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda - x)$$

4) **Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :**

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

On utilisera les résultats sur l'équations d'Euler.

Exercice 6 **Applications géometriques.**

1) **Soit D une droite passant par l'origine déterminer puis tracer les courbes telles que O soit à égale distance entre les points de la courbe et l'intersection de D avec la normale à la courbe au méme point,faire un dessin.**
2) **Déterminer la forme d'un miroir de sorte que tous les rayons issus d'un point O soient réflichis vers un même point A.**

Exercice 7 **Résoudre les équations différentielles suivantes :**

1) $y" - 2\alpha y' + (\alpha^2+1)y = e^x sin(x), \alpha \in \mathbb{R}$.
2) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
3) $y'' + y' = 3 + 2x$
4) $y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$
5) $y'' + 3y' + 2y = e^x$
6) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
7) $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$
8) $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$
9) $y'' - 4y' + 4y = x\mathbf{cosh}(2x)$
10) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$
11) $y'' + y = \sin^3 x$
12) $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos x + 7e^{-x}\sin x - 4e^x\sin(2x)$

Exercice 8 **Utilisation du plan de phase.**
Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentielle de la forme :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 9 **Résoudre le problème de Cauchy suivant :**

$$\begin{cases} y"(x) - 2y'(x) + 3y(x) = ch^2(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 **Équations d'ordre 2 à coefficients non constants.**
Intégrer les équations suivantes :

1) $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ **(poser** $u = e^x$**).**
reponse : $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$**.**

2) $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right) y' + 8x^2 y = x^4$ **(poser** $u = x^2$**).**
reponse : $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \dfrac{2x^2+3}{16}$**.**

3) $x(1 - 2\ln x)y'' + (1 + 2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$ **(chercher une solution de la forme** $y = x^\alpha$**).**
reponse : $y = \lambda x^2 + \mu \ln x$**.**

4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x$ **(poser** $u = \ln x$**). reponse :** $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$**.**

5) $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ **(chercher une solution de l'équation homogène de la forme** $y = x^\alpha$**). reponse :** $y = x^2 \ln|x+1| + \lambda x^2 \left(\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + x - \dfrac{1}{2}\right) + \mu x^2$**.**

6) $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ $\left(\text{\textbf{poser} } y = \dfrac{u}{x^2}\right)$**.**
reponse :$y = \dfrac{-1 + a\cosh x + b\sinh x}{x^2}$**.**

7) $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$ **(chercher les solutions polynomiales). reponse :** $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$**.**

8) $xy'' - 2y' - xy = 0$ **(dériver deux fois).**

Fin.