

FEUILLE D'EXERCICES : *Espaces vectoriels*

PARTIE I : *Généralités*

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Exercice 1. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E .
Montrer que : $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 2. Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E .
Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 3. Soit E un \mathbb{K} -ev non nul et F_1, \dots, F_n des sev stricts de E . On veut montrer que $E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$:

- 1) Traiter le cas $n = 2$.
- 2) Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et on choisit $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $y \notin F_n$.
 - a) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \notin F_n$.
 - b) Montrer que : $\forall i \leq n-1$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.
 - c) Conclure.

Exercice 4. Montrer que les familles $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}, \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\}$ sont libres dans \mathbb{R} en tant que \mathbb{Q} -ev.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
 $f_1 : x \rightarrow \sin(x), f_2 : x \rightarrow \sin(x + a), f_3 : x \rightarrow \cos(x)$.
Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que les familles suivantes $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants :
1) $f_k(x) = x^k$ 2) $f_k(x) = e^{kx}$
3) $f_k(x) = \cos(kx)$ 4) $f_k(x) = \cos^k(x)$

Exercice 7. Soient E un \mathbb{K} -ev et $f, g : E \rightarrow E$ linéaires.
Montrer que : $f(\ker g \circ f) = \ker g \cap \text{Im}(f)$

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2 + f = 0$.
Montrer que : $\ker f \oplus \ker f + \text{id}_E = E$

Exercice 9. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
1) Montrer que $E = \ker f \oplus \text{Im}(g)$.
2) Montrer que $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.

Exercice 10. Soit $T > 0$, on pose $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ } T\text{-périodique}\}$.
1) Montrer que la primitive d'une fonction f , T -périodique est aussi T -périodique si et seulement si $\int_0^T f(x)dx = 0$.
2) Soit $u : E \rightarrow E$ montrer que : $E = \ker u \oplus \text{Im}(u)$.
 $f \mapsto f''$

Exercice 11. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes de E .

Montrer que : $g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \ker g$.

Exercice 12. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E .

- 1) Montrer que : $\text{Im}(f) \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.
- 2) Montrer que : $E = \text{Im}(f) + \ker f \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
- 3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'on ait : $E = \text{Im}(f) \oplus \ker f$.

Exercice 13. .

- 1) Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 0\}$,
 $F = \{(a, 2a, 4a) \text{ tel que } a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
- 2) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $p((x, y, z))$ la projection sur E parallèlement à F et $s((x, y, z))$ la symétrie par rapport à E parallèlement à F .

Exercice 14. On considère p et q deux projecteurs sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

- 1) Montrer que : $p \circ q = q \iff \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.
- 2) Montrer que : $p + q$ est un projecteur $\iff p \circ q + q \circ p = 0$
 $\iff p \circ q = 0, q \circ p = 0$
 et que dans ce cas : $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$
 $\ker p + q = \ker p \cap \ker q$
- 3) On suppose dans cette question que : $p \circ q = 0$. Montrer que :
 - a) $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
 - b) $\ker r = \ker p \cap \ker q$
 - c) $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Exercice 15. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $(x, f(x))$ est liée $\forall x \in E$.

- 1) Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
- 2) Montrer que $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$
 On pourra étudier les cas : $\{x, y\}$ libre et $\{x, y\}$ liée.
- 3) En déduire que f est une homothétie de E .
- 4) Montrer que f est une homothétie de E si et seulement si pour tout x dans E , on a $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 16. .

- 1) Montrer que tout \mathbb{R} -endomorphisme, f de \mathbb{C} peut s'écrire sous la forme : $f(z) = az + b\bar{z}$ où $a, b \in \mathbb{C}$ des constantes à exprimer en fonction de $f(1)$ et $f(i)$.
- 2) Montrer que f injectif $\iff |a| \neq |b|$.

Exercice 17. .

- 1) Soit E un \mathbb{K} -ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = 0, f \circ g + g \circ f = id_E$. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- 2) Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, et soit F un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$. Montrer que :
 - a) $f^2 = 0$.
 - b) $\forall x \in E$, il existe $y, z \in F$ uniques tels que $x = y + f(z)$.
 - c) Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = id_E$. Montrer que $g \circ f$ est une projection et que :
 $\text{Im}(g) \circ f = \text{Im}(g)$
 $\text{Ker}(g) \circ f = \text{Ker}(f)$

Exercice 19. Soit u, v et w trois vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E .

- 1) Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, w)$ si et seulement si :
 $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$
- 2) Soit F un sous-espace vectoriel de E .
Montrer que $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$ si et seulement si : $\exists u \in F \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad u + \alpha v + \beta w = 0$ et $\alpha\beta \neq 0$

Exercice 20. Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^2 - 5f + 6\text{id}_E = 0$

- 1) Montrer que $(f - 2\text{id}_E) \circ (f - 3\text{id}_E) = 0$.
- 2) En déduire que $E = \ker(f - 2\text{id}_E) \oplus \ker(f - 3\text{id}_E)$.

Exercice 21. Rendre directe une somme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -ev E tels que $F + G = E$. On note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .
Montrer que : $E = F' \oplus G$

Exercice 22. Barycentre de projections :

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et p, q deux projections de même base H et de directions F, G . Montrer que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est encore une projection de base H .
On rappelle que la base d'un projecteur est son image, sa direction est son noyau.

Exercice 23. Commutant d'un projecteur

Soit E un \mathbb{K} -ev et u un endomorphisme de E .
On note : $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } u \circ v = v \circ u\}$

- 1) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- 2) On suppose que $u = p$ est un projecteur. Montrer que v commute avec p si et seulement si v laisse stable le noyau et l'image de p .

Exercice 24. Commutants itérés :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $C_i = \ker \varphi^i$, ainsi $C_0 = 0$, C_1 est le commutant de u , C_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u, \dots .

- 1) Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
- 2) Montrer que $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ appelée **Commutant** de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 25. Relation d'ordre sur les projecteurs :

On munit l'ensemble des projections d'un espace vectoriel E de la relation binaire suivante : $p \ll q \iff p \circ q = q \circ p = p$

- 1) Montrer que c'est une relation d'ordre.
- 2) Soient p, q deux projections permutables. Montrer que $\sup(p, q) = p + q - p \circ q$ et $\inf(p, q) = p \circ q$.

Exercice 26. Endomorphismes nilpotents. Soit E ev et $f, g : E \rightarrow E$ linéaires, $n \in \mathbb{N}^*$ telles que f est une bijection vérifiant : $f \circ g = g \circ f, \quad g^n = 0$.

On dit alors que g est un endomorphisme **nilpotent**.

- 1) Montrer que $\text{id}_E - g$ et $\text{id}_E + g$ sont des automorphisme de E , puis exprimer leurs réciproques en fonction des puissances de g .

Indication : on pourra utiliser l'égalité :

$$\text{id}_E - u^n = (\text{id}_E - u) \sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \forall u \in \mathcal{L}(E).$$

- 2) Montrer que $(f^{-1} \circ g)^n = 0$.
- 3) En déduire que $\text{id}_E - f^{-1} \circ g$ est un automorphisme de E .
- 4) Montrer que $f + g$ est un isomorphisme.

Fin.