# Feuille d'exercices : *Espaces vectoriels euclidiens*

**MPSI-Maths.**
**Mr Mamouni** : *myismail1@menara.ma*

**Source disponible sur :**
©http://www.chez.com/myismail

**Exercice 1.** *Donner dans la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *la matrice de la projection orthogonale sur :* $F = Vect(e_1 + 2e_2 + e_3, e_3)$.

**Exercice 2.** .

***1)*** *Reconnaitre les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de* $\mathbb{R}$ *sont :*

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

***2)*** *Complétez la matrice*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

*pour que* $A$ *soit une matrice orthogonale positive puis donner la nature de la matrice* $A$.

**Exercice 3.** *Soit* $u$ *un vecteur unitaire de matrice* $U$ *dans une base orthonormée* $\mathcal{B}$.

***1)*** *Montrer que* $U^tU$ *est la matrice dans* $\mathcal{B}$ *de la projection orthogonale sur* $Vect(u)$.

***2)*** *Trouver la matrice de la symétrie associée.*

**Exercice 4.** $E$ *désigne un espace euclidien de dimension* $n$.
*Soit* $f : E \to E$ *une application non nécéssairement linéaire.*

***1)*** *On suppose que* $f$ *conserve le produit scalaire.*
*Démontrer que* $f$ *est linéaire.*

***2)*** *On suppose que* $f$ *conserve les distances.*
*Démontrer que* $f = f(0_E) + g$ , *avec* $g \in \mathcal{O}(E)$.

**Exercice 5.** *Soit* $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On pose pour* $\vec{x} \in E$ : $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.
*Déterminer* $\lambda$ *pour que* $f \in \mathcal{O}(E)$. *Reconnaitre alors* $f$.

**Exercice 6.** *Montrer que les endomorphismes de* $\mathbb{R}^3$ *qui concervent le produit vectoriel sont exactement les rotations.*

**Exercice 7.** *Soit* $E$ *espace vectoriel euclidien,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille d'éléments* $E$, *tous unitaires telle que :*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \quad \forall x \in E$$

*Montrer que c'est une base orthonormale de* $E$.

**Exercice 8.** ***Formule du produit mixte.***
*Montrer que* $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *on a :*

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

**Exercice 9. *Division vectorielle.***
*Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.*

1) *Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs donnés, $\vec{a} \neq \vec{0}$.*
*Étudier l'équation : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.*
*Indication : On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{y}$.*
2) *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs donnés Trouver $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tels que*

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{a} \wedge \vec{b}\\ \vec{v} &= \vec{b} \wedge \vec{c}\\ \vec{w} &= \vec{c} \wedge \vec{a}\end{aligned}$$

*Indication : calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.*

**Exercice 10. *Polynômes de Laguerre :***
*On pose pour $n$ entier et $x$ réel : $L_n(x) = (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$*

1) *Montrer que $L_n$ est un polynôme, préciser son degré, ainsi que son coefficient dominant.*
2) *Donner $L_0, L_1, L_2$.*
3) *Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonctions polynomiales, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.*
*Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire.*
4) *Montrer que si $k < n$ alors $\left[(x^n e^{-x})^{(k)}\right](0) = 0$.*
5) *En déduire que pour tout $k < n$ on a : $< L_k, L_n >= 0$, puis que $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.*
6) *Pour tout entier $k$ ,on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$, justifier l'existence de cet intégrale, puis base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.*
7) *En déduire $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 + at + b)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$.*

**Exercice 11. *Polynômes de Tchebychev :***
*On pose pour $n$ entier et $-1 \leq x \leq 1$, $T_n(x) = \cos(nArccos(x))$.*

1) *Montrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.*
2) *Pour tous $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continues, on pose :*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

*Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.*
3) *Montrer que la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.*

**Exercice 12. *Inégalité de Ptolémée.***
*Soit $E$ un espace euclidien. Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.*

1) *Montrer que $f$ est une involution, $f^2 = id_E$ et conserve les angles de vecteurs.*
2) *Montrer que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.*
3) *Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que :*
$\|\vec{a} - \vec{c}\|\,\|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|\,\|\vec{c} - \vec{d}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\|\,\|\vec{a} - \vec{d}\|$.
*Indication : se ramener au cas $\vec{a} = \vec{0}$ et utiliser l'application $f$.*

**Exercice 13. *Propriétés du produit vectoriel.***
*Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :*

$$\begin{aligned}&\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0\\ &(\vec{u} \wedge \vec{v}).(\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \mid \vec{w})(\vec{v} \mid \vec{t}) - (\vec{u} \mid \vec{t})(\vec{v} \mid \vec{w})\\ &(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w}\end{aligned}$$

**Exercice 14.** ***Étude de projections.***

**1)** *Caractérisation des projections orthogonales.*
*Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.*
*Montrer que :*
*$p$ est une projection orthogonale $\iff \forall\ \vec{x} \in E,\ \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\,\|$.*

**2)** *Composition de projecteurs.*
*Soient $F$, $G$ deux sev d'un ev euclidien $E$ tels que $F^{\perp} \perp G^{\perp}$. On note $p_F$ et $p_G$ les projections orthogonales sur $F$ et sur $G$. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.*

**3)** *Projecteurs commutant*
*Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $p$, $q$ deux projections orthogonales. Montrer que $p$ et $q$ commutent si et seulement si $(\text{ Im } (p) \cap \text{ Im } (q))^{\perp} \cap \text{ Im } (p)$ et $(\text{ Im } (p) \cap \text{ Im } (q))^{\perp} \cap \text{ Im } (q)$ sont orthogonaux.*

**Exercice 15.** ***Étude de symétries.***

**1)** *Soient $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \perp G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales de bases $F$ et $G$.*
*Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F\oplus G)^{\perp}}$.*

**2)** *Soient $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \subset G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales de bases $F$ et $G$.*
*Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F\oplus G^{\perp}}$.*

**3)** *Soient $H, K$ deux hyperplans de $E$, et $s_H$, $s_K$ les symétries associées.*
*Démontrer que $s_H$ et $s_K$ commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^{\perp} \subset K$.*

**Exercice 16.** *On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant*

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$

*Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :*

$$\varphi(P)(X) = (X^2 - X)P''(X) + (2X - 1)P'(X)$$
$$s(P)(X) = P(1 - X)$$

**1)** *Montrer que $\varphi, s$ définissent des endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

**2)** *Donner leurs matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.*

**3)** *En déduire leurs valeurs propres, sont-ils bijectifs ? diagonalisables ?*

**4)** *Montrer que $\forall k \in [\![0; n]\!], \exists! L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(L_k) = k, co(L_k) = 1, \varphi(L_k) = k(k + 1)L_k$.*

**5)** *Montrer que $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^n$ on a :*
*$\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$ et $\langle s(P), Q\rangle = \langle P, s(Q)\rangle$.*

**6)** *En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

**7)** *En utilisant c. Dire pourquoi les matrices de $\varphi, s$ dans $(L_0, \dots, L_n)$ sont symétriques, expliciter ensuite ces matrices.*

**8)** *Montrer que $s$ est une réflexion, préciser par rapport à quel hyperplan.*

**Exercice 17.** ***Matrice de Gram.***
*Soient* $\mathcal{C} = (x_1, \ldots, x_p)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien* $E$ *de dimension* $n$, *et* $Gram(x_1, \ldots, x_p)$ *leur matrice de Gram de type* $p \times p$, *dont les coefficients sont* $\langle x_i, x_j \rangle$.
*On pose* $\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \det\left(Gram(x_1, \ldots, x_p)\right)$
*Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormale de* $E$, *et* $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

***1)*** *a) Comparer* $rgA$ *et* $rg(x_1, \ldots, x_p)$.

*b) Préciser le type de la matrice* $A$, *ainsi que ses coéfficients.*

*c) Montrer que* ${}^tAA = Gram(x_1, \ldots, x_p)$.

*d) Montrer que* $Ker\ ({}^tAA) = Ker\ (A)$, *en déduire que* $rg(x_1, \ldots, x_p) = rg\, Gram(x_1, \ldots, x_p)$.

***2)*** *a) Montrer que* $\det G$ *est inchangé si on remplace* $x_k$ *par* $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.

*b) Soit* $F = Vect(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $x \in E$.
*Montrer que* $d(x, F)^2 = \dfrac{\Gamma(x_1, \ldots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \ldots, x_n)}$.

***3)*** *On suppose dans cette question que* $\mathcal{B}$ *une fammile quelconque de* $E$, *vérifiant la relation suivante :*

$$\forall\ cx \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$$

*a) Démontrer que* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* $E$.

*b) Démontrer que :* $\forall\ x, y \in E,\ (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i)$.

*c) On note* $G$ *la matrice de Gram de* $e_1, \ldots, e_n$.
*Démontrer que* $G^2 = G$ *et conclure.*

***4)*** *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, *on suppose dans cette question que* $\mathcal{B}$ *une base quelconque de* $E$.
*Montrer que* $\Gamma(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = (\det u)^2 \Gamma(e_1, \ldots, e_n)$.

$\boxed{\text{Fin.}}$