Feuille d'exercices : *Fonctions à deux variables.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Soit (ABC) un triangle du plan, déterminer les points du plan où les fonctions suivantes atteignent leurs extremums :*

1) $f : M \to MA^2 + MB^2 + MC^2$.

2) $g : M \to MA + MB + MC$.

3) $h :: M \to MA \times MB \times MC$

. Préciser leurs natures (minimums , maximums).

Exercice 2. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1) $\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) f + x^2 + y^2 = 0$
Passer aux coordonnées polaires).

2) $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Poser : $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}, y = \frac{u}{v}$.

3) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$.

4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{x}{y} + a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy$.

5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = af$.

Exercice 3. *Déterminer les extremums des fonctions suivantes :*

1) $f : (x,y) \to 2x + y - x^4 - y^4$.

2) $g : (x,y) \to xe^y + ye^x$.

3) $h : (x,y) \to \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

Préciser leurs natures (minimums , maximums, locaux , globaux).

Exercice 4. *Calculer les intégrales doubles suivants :*

1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ *où* $\left\{D = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \le x \le 1 - \dfrac{y^2}{4}\right\}$.

2) $\displaystyle\iint_D x^2ydxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$.

3) $\displaystyle\iint_U xydxdy \qquad U = \{(x,y) \text{ tel que } x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$

4) $\displaystyle\iint_U |xy|dxdy \qquad U = \{(x,y) \text{ tel que } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$

5) $\displaystyle\iint_U (x^2+y^2)^2dxdy \qquad U = \{(x,y) \text{ tel que } x \ge 1, y \ge 1, x + y \le 3\}$

6) $\displaystyle\iint_U (1+x^2+y^2)dxdy \qquad U == \{(x,y) \text{ tel que } x^2 + y^2 \le 1\}$

Exercice 5. *Calculer les intégrales triples suivants :*

1) $\iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz$ *où* D *est le tétraèdre de sommets* $A(2,1,0); B(2,-1,0); C(0,0,3), D(0,0,-3)$.

2) $\iiint_D z^2 y dxdydz$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Exercice 6. *Pour* $x > 0$ *on pose* $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

1) *Montrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une seule solution* $a \in]0, \frac{1}{e}[$.

2) *Sur* $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ *on pose* $f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2)$ *déterminer le point critique.*

3) *Vérifier que* f *admet un minimum relatif en ce point et que :* $\min f = -a(a+1)$.

Exercice 7. *Soit* $\lambda > 1$, *on pose* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x > 0\}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x > 0, y \neq 0\}$, *on se propose d'étudier les extremums de la fonction* $f(x,y) = x^\lambda y - y^2 - y\ln(x+1) + 1$.

1) *Pour* $x > 0$ *on pose* $h(x) = x^\lambda - \ln(x+1)$, *montrer que l'équation* $h'(x) = 0$ *admet une seule solution* $b \in]0, +\infty[$.

2) *On pose* $h(b) = 2c$, *montrer que* $c < 0$.

3) *Montrer que l'équation* $h(x) = 0$ *admet une seule solution* $a \in]0, +\infty[$ *et que* $a > b$.

4) *Déterminer les points critiques de* f, *(on les exprimera en fonction de* a, b, c*)*

5) *Montrer que* f *admet un seul extremum, que l'on précisera.*

Exercice 8. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

1) *Calculer les dérivés partielles des fonctions suivantes :*

$$g_1(x,y) = f(y,x) \qquad g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$$

2) *Calculer les dérivés des fonctions suivantes :*

$$h_1(x) = f(x,x) \qquad h_2(x) = f(x, f(x,x))$$

3) *Calculer les dérivés des fonctions suivantes :*

$$h_1(x) = f(u(x), v(x)) \qquad h_2(x) = f(u(x), f(v(x), w(x)))$$

Où u, v, w *trois fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 9. ***Laplacien****.*
Soit u *une fonction réelle des variables réelles* x *et* y *définie par* $u(x,y) = (F \circ r)(x,y)$ *où* $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *et* F *est une fonction reelle d'une variable reelle. On pose :*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1) *Calculer :*

$$\frac{\partial r}{\partial x} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$$

2) *Prouver que :*

$$\Delta u = F''(r) + \frac{F'(r)}{r}$$

3) *En déduire* Δu *lorsque* $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Fin.