Feuille d'exercices : *Fonctions intégrables.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Exercice 1. *Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles cités.*

1) $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$, *sur* $]0,1[$.

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, *sur* $]0,+\infty[$, *où* α *paramètre réel.*

4) $f(x)=x^\alpha\,|\ln x|^\beta$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$, *où* α,β *paramètres réels.* ***Intégrales de Bertrand.***

5) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}$ *et* $g(x)=\dfrac{1-x}{\ln x}$ *sur* $]0,1[$.

6) $g:x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)-\ln 2}{x^2-1}$ *et* $h:x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)-x\ln 2}{x^2-1}$.

Exercice 2. ***Intégrale de Gauss.***

1) *Montrer que* $\ln(1+x)\le x$, *pour tout réel* $x>-1$.

2) *En déduire que* $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\le \mathrm{e}^{-x}\le\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, $\forall x\in[0,n[$.

3) *Montrer que,* $x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$, *puis en déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Indication : On pourra utiliser l'encadrement :
$\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n\le \mathrm{e}^{-x^2}\le\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$, *pour tout* $x\in[0,\sqrt{n}[$, *puis utiliser* ***exercices 5 et 6.***

Exercice 3. ***Comparaison entre somme et intégrale.***

1) *Montrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *la fonction* $x\mapsto x^n\ln x$ *est intégrable sur* $]0,1]$, *puis calculer* $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x$.

2) *Montrer que, la fonction* $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{1-x}$, *est bornée sur* $]0,1[$ *puis intégrable.*

3) *Montrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a :*
$$\left|\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\right|\le\frac{M}{n+1}\ \text{ où } M=\sup_{]0,1[}|f|.$$
Indication : Utiliser la relation : $1-x^n=(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k$.

4) *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.
Indication : On admet le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4. *Soit* $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ *continue telle que* f^2 *intégrable.*

1) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

2) *Intérpreter ce résultat.*

Exercice 5. ***Étude d'une suite d'intégrales.***

1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) *Donner une relation entre I_n et I_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :* $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) *Montrer que J_n est bien définie.*

b) *Donner une relation entre J_n et J_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

c) *Exprimer J_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

d) *Donner un équivalent simple de J_n, quand $n \longrightarrow +\infty$. On pourra utiliser la relation de Stirling :*

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

e) *Montrer que* $0 \le J_n - I_n \le \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

f) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6. ***Intégrales de Wallis.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$.

1) *Donner une relation entre w_n et w_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

2) *Exprimer w_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3) *Donner un équivalent simple de w_n, quand $n \longrightarrow +\infty$. On pourra utiliser la relation de Stirling :*

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} w_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 7. ***La constante d'Euler.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1) *Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone bornée entre 0 et 1, donc converge, on notera γ sa limite, appelée constante d'Euler.*
Indication : Penser à utiliser le TAF, ou bien l'inégalité : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, *pour tout* $k \ge 2$.

2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :* $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$.
Montrer que J_n est bien définie.
On admet dans la suite que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$, qu'il est possible de montre à l'aide d'une intégration par parties ou changement variable.

3) *On pose* $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x$.

a) *Montrer que K est bien définie.*

b) *Montrer que $\ln(1+x) \le x$, pour tout réel $x > -1$.*

c) *En déduire que* $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \le \mathrm{e}^{-x}$, *pour tout* $x \in [0, n[$.

d) *Montrer que pour tout* $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$, *on a :* $x - x^2 \le \ln(1+x)$.

e) *En déduire que pour tout*

$n \ge 4, t \in [0, \sqrt{n}]$ *on a :* $t + n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \ge -\dfrac{t^2}{n}$

$n \ge 4, t \in [0, \sqrt{n}]$ *on a :* $-\dfrac{t^2}{n} \ge \ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)$

$n \ge 4, t \in [0, n]$ *on a :* $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ge \mathrm{e}^{-t}\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)$

$n \ge 4, t \in [0, n]$ *on a :* $0 \le \mathrm{e}^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \le \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{n}$

f) *En déduire que $K = -\gamma$.*