CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Prépas G.S High Tech, Rabat

Feuille d'exercices: *Fonctions réelles*

26 mars 2009

Blague du jour :
Bientôt (dans 4ans au moins) vous serez ingenieur, peut être ingeénieur informaticien. Vérifier sur la liste ci-dessous si vous avez le profil, les types d'ingénieurs en informatique sont :
- **L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.**
- **L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.**
- **L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, dès le moment où vous lui tournez le dos.**
- **L'ingénieur WINDOWS : Tout le monde sait qu'il ne peut pas faire une chose correctement, mais personne ne peut s'en passer de ses services.**
- **L'ingénieur ECONOMISEUR D'ECRAN : Il est bon à rien, mais au moins, il est marrant !**

Mathématicien du jour ***Holder***
Otto Ludwig Hölder (1859-1937) est un mathématicien allemand. On le connaît notamment pour : l'inégalité de Hölder ; le théorème de Jordan-Hölder ; le théorème de Hölder ; la moyenne de Hölder ; la condition de Hölder.

Continuité et dérivabilité globales

Exercice 1 . **Soient** $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continues, telles que** $\forall\ x \in [a,b],\ \exists\ y \in [a,b]$ **tel que** $f(x)=g(y)$**. Montrer qu'il existe** $x\in[a,b]$ **tel que** $f(x)=g(x)$**.**

Exercice 2 . **Soit** $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **croissante telle que** $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}$ **est décroissante. Montrer que** f **est continue.**

Exercice 3 . **Soit** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **croissante telle que** $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f\circ f(x)=x$**. Montrer que :** $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$**.**

Exercice 4 . **On pose :** $\begin{array}{lll} f(x) & = x^2\left(2+\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) & \textbf{si } x\neq 0 \\ & = 0 & \textbf{si } x\neq 0 \end{array}$
Montrer que f **admet un minimum strict en 0 mais** f **n'est croissante sur aucun intervalle de la forme** $[0,a]$**.**

Exercice 5 . **On pose :** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ **si** $0 < x \leq 1$

$= 0$ **si** $x = 0$

Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$, strictement croissante mais que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.

Exercice 6 . **Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$. Montrer que strictement monotone.**

Exercice 7 . **Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leq 0$.**

Exercice 8 . **Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou bien $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.**

Exercice 9 . **Théorème de Rolle à l'infini.**
Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet la même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution

Exercice 10 . **Continuité uniforme.**

1) **Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.**
   a) **Montrer que f est bornée.**
   b) **Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécéssairement les deux.**
   c) **Montrer que f est uniformément continue.**
2) **Soit I un intervalle borné et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle borné.**
3) **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a + b|x|$.**
   Indication : Prendre $\varepsilon = 1$ et majorer $|f(x) - f(0)|$.
4) **Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.**
5) **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f(n) = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.**

Exercice 11 .**Étude d'une suite implicite.**
Soit $a \in]0,1[$, $(n \in \mathbb{N}^*$ **on se propose d'étudier les solutions des équations** $f_n(x) = 0$ **où** $f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a$.

1) **Montrer que** $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ **est croissante.**
2) **Étudier** f_n **sur** $]0,1[$, **en déduire que l'équations** $f_n(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $]0,1[$ **que l'on notera** x_n.
3) **Dire pourquoi** $\dfrac{1}{2} \leq x_n \leq 1$, **pour tout** $n \geq 1$.
4) **Étudier le signe de** $f_n(x_{n+1})$ **en deduire que** (x_n) **est croissante puis qu'elle converge vers une limite finie** l.
5) **Montrer que** $l = 1$.
6) **En déduire que** $\lim\limits_{+\infty} x_n^n = a$.
7) **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **on a :** $x_n^n \geq a$.
8) **Montrer que** $\forall (x,y,b) \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N}^*$, **on a :** $0 < b \leq y \leq x \Longrightarrow x - y \leq \dfrac{x^n - y^n}{nb^{n-1}}$.
9) **En déduire que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **on a :** $0 \leq \dfrac{x_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \dfrac{x_n^n - a}{na}$.
10) **En déduire que :** $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}$.

Exercice 12 . **Injectivité locale.**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **dérivable et** $a \in \mathbb{R}$ **tel que** $f'(a) \neq 0$.

1) **Montrer qu'il existe un voisinage** V **de** a **tel que** $\forall\ x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2) **Si** f' **est continue au point** a, **montrer qu'il existe un voisinage** V **de** a **tel que** $f_{|V}$ **soit injective.**

Exercice 13 . **le TVI, l'injection et la continuité.**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. **On dit que** f **vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si** $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ **avec** $a < b, \forall\ y$ **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b), \exists\ x \in [a,b]$
tel que $f(x) = y$.

1) **Montrer que si** f **vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.**
2) **Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.**

Exercice 14 . **Propriété des valeurs intermédiaires pour** f'.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **dérivable.**

1) **On suppose que :** $\forall\ x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0$.
   Montrer que f' **est de signe constant.**
2) **Dans le cas général, montrer que** $f'([a,b])$ **est un intervalle.**

Exercice 15 . **Théorème des accroissement finis généralises.**
Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continues dérivables sur** $]a,b[$ **telles que :**
$|f'(x)| \leq |g'(x)|, \quad \forall x \in]a,b[$
Montrer que : $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$

Exercice 16 .**Étude des extremums et zéros d'une suite de fonctions.**
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$ on pose $f_n(x) = x^n + x + 1$.

1) **Etudier le signe de f'_{2n} sur $\mathbb{R}$.**
2) **En déduire que f_{2n} atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en $a_n = -\sqrt[2n-1]{\dfrac{1}{2n}}$.**
3) **On pose $f_{2n}(a_n) = m_n$, montrer que : $-1 < a_n < 0$ et $m_n > 0$.**
4) **En déduire les limites de a_n et m_n.**
5) **Pour tout réel $x > 0$ tel que $x \neq \dfrac{1}{2}$, on pose : $f(x) = -\sqrt[2x-1]{\dfrac{1}{2x}}$.**
   Trouver une fonction g telle que $f'(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{(2x-1)^2}$.
6) **Étudier le signe de g en déduire que f est décroissante.**
7) **En déduire que (a_n) est monotone.**
8) **Étudier f_{2n+1}, en déduire que l'équation $f_{2n+1}(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera b_n, vérifier que $-1 < b_n < -\dfrac{1}{2}$.**
9) **Calculer $f_{2n+1}(b_{n+1})$, en déduire que (b_n) est décroissante puis qu'elle converge.**
10) **Montrer que $\lim\limits_{+\infty} b_n = -1$, en déduire que $\lim\limits_{+\infty} b_n^{2n+1} = 0$.**

Exercice 17 . **Dérivabilité uniforme.**
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Démontrer que : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tel que $\forall\ x, y \in [a, b]$,
$0 < |x - y| < \delta \Longrightarrow \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x)\right| \leq \varepsilon.$

Exercice 18 . **Étude d'une suite récurrente.**
On pose $\begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} = x_n\left(2 - \ln(x_n)\right), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) **Montrer que (x_n) est bien definie.**
   On pourra montrer par récurrence que $0 < x_n \leq e$
2) **Montrer que (x_n) est croissante.**
3) **En déduire que (x_n) est convergente, preciser sa limite.**
4) **Montrer que :**
$$\forall (x, y) \in [2, e]^2 : \left|\ln(y) - \ln(x) - \frac{y - x}{x}\right| \leq \frac{(y - x)^2}{4}$$
5) **En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , |x_{n+1} - e| \leq \dfrac{3}{4}|x_n - e|^2$.**
6) **En deduire les 5 chiffres aprés la virgule de e .**

Exercice 19 . **Étude d'une suite implicite.**

1) **Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation : $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une solution unique dans $]0,1[$ que l'on notera x_n.**
   Indication : On pourra penser à utiliser le TVI sur $[0,1]$ pour la fonction $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$.
2) **Montrer que (x_n) est monotone puis convergente.**
3) **Calculer x_2. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} x_n^n = 0$, en déduire $\lim\limits_{+\infty} x_n$.**

Exercice 20 . **Étude d'une suite implicite. Pour tout entier n et réel x on pose $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n - 1$.**

1) **Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0,1]$ que l'on notera x_n.**
2) **Calculer $f_{n+1}(x_n)$, en déduire que (x_n) est décroissante puis qu'elle converge.**
3) **Montrer que pour x différent de 1 on a :**
$$f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - 1$$
4) **Calculer x_2, puis en déduire les limites des suites suivantes $(x_n^n), (nx_n^n), (x_n)$.**

Exercice 21 . **Distance à la corde.**
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) **On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :**
$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
   Indication : Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$.
2) **Cas général : Soit $c \in]a,b[$.**
   Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
3) **En déduire la distance de la corde à la courbe en tout point, puis une majoration de cette distance.**

Exercice 22 . **Cordes de longueur $\frac{1}{n}$.**
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1) **Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.**
2) **Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.**
3) **Trouver une fonction f telle que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$, $f(x) \neq f\left(x + \frac{2}{5}\right)$.**
4) **Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que :**
   $\forall\, b \in]0,a],\ \exists\, x \in [0, 1-b]$ **tel que** $f(x) = f(x+b)$.

Exercice 23 . Théroème de Rolle successif.

1) soit $n \in \mathbb{N}^*, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ qui s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$, montrer alors que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
   Indication : Penser à utiliser le théorème de Rolle plusieurs fois.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_1 < a_2 < .... < a_n$ des nombres reéls deux à deux distincts et f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a_1, a_n]$ qui s'annule sur tous les a_i, montrer que :
   $$\forall x \in]a_1, a_n[\setminus\{a_k \text{ tel que } 1 \leq k \leq n\} \quad \exists c_x \in]a_1, a_n[\text{ tel que } f(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x - a_k).$$
   Indication on pourra fixer x et utiliser (1) pour la fonction $g(t) = f(t) - A\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)$ avec A nombre réel choisi tel que : $g(x) = 0$.

Exercice 24 . Écart à un polynôme interpolateur.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange de degré inférieur à $n-1$, prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i, on dit qu'il interpolle f aux points a_i. On pose $Q(x) = \dfrac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$.
Montrer que : $\forall\ b \in \mathbb{R},\ \exists\ c \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = P(b) + Q(b)f^{(n)}(c)$
Indication : Considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$.

Exercice 25 . Polynômes de Legendre.
On pose $f(t) = (t^2 - 1)^n$.

1) Montrer que : $\forall\ k \in \{0, \ldots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 26 . Règle de l'Hospital.
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\ x \in\ ]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
   Indication : Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi.
2) En déduire que si $\lim\limits_{a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors
   $$\lim_{a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l \qquad \textit{(Règle de l'Hospital).}$$
3) Application : déterminer $\lim\limits_{x} 0^+ \dfrac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 27 . TAF dans $\mathbb{C}$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa fonction dérivée .
2) Montrer que f ne vérifie pas le ***TAF***

Convexité

Toutes les fonctions considérées dans ce qui suit sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 28 . **Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.**
Montrer que : $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 29 . **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.**
Montrer que l'on a :
– **Soit f croissante sur $\mathbb{R}$.**
– **Soit f décroissante sur $\mathbb{R}$.**
– **Soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.**

Exercice 30 ..
1) **Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.**
2) **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.**

Exercice 31 . **Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ affine telles que : $\forall\, x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ et $f(1) = g(1)$.**
Montrer que : $f = g$

Exercice 32 . **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$.**
Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

Exercice 33 . **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.**
Montrer que f' est continue.

Exercice 34 . **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \leq 0,\ f' \leq 0,\ f'' \leq 0$.**
1) **Etudier l'existence des limites (dans $\mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\dfrac{f(x)}{x}$.**
2) **Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.**

Exercice 35 . **Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\ x, y \in [a,b],\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.**

Exercice 36 . **Soit $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ convexe, bijective, croissante.**
On pose : $a \leq u_0 = u \leq v_0 = v \leq b$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$
$$v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right)$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 37 . **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.**
Montrer que : $\ln f$ est convexe $\Longleftrightarrow \forall \alpha > 0,\ f^\alpha$ est convexe.

Exercice 38 ..

1) **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.**
   Montrer que $p = \lim\limits_{+\infty}(f(x) - xf'(x))$ existe.
2) **On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.**
3) **Montrer alors que $\lim\limits_{+\infty} f(x) - mx - p = 0$.**

Exercice 39 . **Étant donné une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.**

Exercice 40 . **Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = f(0)$.**
Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 41 . **Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ concave.**

1) **Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.**
   Indication : Utiliser la monotonie de la fonction : $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.
2) **Montrer que : $\forall\ x, y \geq 0,\ \ f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.**
   Indication : Utiliser la définition de la convexité avec $t = \dfrac{x}{x - y} < 0$.

Exercice 42 . **Constante d'Euler.**
Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1) **Montrer que : $\forall\ x \geq 1,\ \ f(x + 1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x - 1)$.**
2) **On pose :** $\begin{array}{ll} u_n & = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n) \\ v_n & = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n + 1) \end{array}$
   Montrer que ces suites convergent.
3) **On prend $f(x) = \ln x$. Soit $\gamma = \lim\limits_{x} +\infty u_n$ (constante d'Euler).**
   Calculer γ à 10^{-2} près.

Exercice 43 . **Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF.**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b,\ \ \exists!\ c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

1) **Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \longmapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est monotone sur $] - \infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.**
2) **En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.**

Exercice 44 . **Inégalités en vrac**

1) **Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 2e^{\frac{x}{2}}$.**
2) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n + 1)x + n \geq 0$.**
3) **Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $x^n - 1 \geq n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right)$.**

Fin
à la prochaine