Feuille d'exercices : *Fonctions réelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Exercice 1. Soit $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(2x)-f(x)=0$. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln(x)}=0$.
Indication : On pourra d'abord montrer via Césaro que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(2^n)}{n}=0$.

Exercice 2. Soient $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continues.
On suppose que : $\forall\, x\in[a,b],\ \exists\, y\in[a,b]$ tel que $f(x)=g(y)$.
Montrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=g(x)$.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que : $f(ax)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ où a nombre réel fixe différent de 1 et -1 .
Montrer que f est constante
Indication : Commencer d'abord par étudier le cas $-1<a<1$.

Exercice 4. Soit $f:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ croissante telle que :
$$g:\ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}$$
est décroissante.
Montrer que f est continue.

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que :

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x,y.
   On pourr montrer d'abord que $f(x)=ax$ où $a=f(1)$. Pour cela montrer que :
   a) $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{N}$.
   b) $f(0)=0$, puis $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{Z}$.
   c) $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{Z}$.
   d) $f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R}$.
   e) $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{Q}$.
   f) $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$. en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de f.
2) $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x,y.
   Poser $g(x)=f(e^x)$, en déduire la forme de g puis celle de f.
3) $f(xy)=f(x)f(y)$ pour tous réels x,y.
   Montrer que : $\begin{array}{l} f(1)=0 \implies f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\ , \\ f(1)\neq 0 \implies f(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^* \end{array}$
   puis poser $g=\ln|f|$, en déduire la forme de g puis celle de f.
4) $f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tous réels x,y.
   Poser $g(x)=e^{f(x)}$, en déduire la forme de g puis celle de f.

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f\circ f(x)=x$. Montrer que : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$.

Exercice 7. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, a\in I$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une application dérivable en a.
Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$.

Exercice 8. .

1) Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire, celle d'une fonction impaire est paire.
2) En déduire qu'en un centre de symetrie de la courbe la dérivée seconde est nulle .

Exercice 9. On pose : $\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) && \text{si } x\neq 0\\ &=0 && \text{si } x\neq 0\end{aligned}$
Montrer que f admet un minimum strict en 0 mais f n'est croissante sur aucun intervalle de la forme $[0,a]$.

Exercice 10. On pose : $\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} && \text{si } 0<x\leq 1\\ &=0 && \text{si } x=0\end{aligned}$
Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$, strictement croissante mais que l'équation $f'(x)=0$ admet une infinité de solutions.

Exercice 11. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $f'(x)\neq 0,\quad \forall\, x\in[a,b]$. Montrer que strictement monotone.

Exercice 12. .

1) Calculer les dérivée de : $\ln(\ln(\ln(\ln(x))))\quad , x^{x^{x^x}}$.
2) Calculer les dérivées $n^{\text{ème}}$ de

$$(1-x^2)\cos(x)\quad ,\frac{e^x}{x},\quad x^{n-1}\ln(x)$$

Exercice 13. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a)=f(b)=0$, et $f'(a)>0,\ f'(b)>0$.
Montrer qu'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)=0$, et $f'(c)\leq 0$.

Exercice 14.
1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathcal{C}^n(I)$.
Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, tel que $\dfrac{1}{x}\in I$ on a :

$$\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pourra raisonner par récurrence.
2) ***Application :*** Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions f définies par : $f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, f(x)=x^{n-1}\ln(x)$ et $f(x)=x^{n-1}\ln(1+x)$.

Exercice 15. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ on pose

$$S_n(f) = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

1) Montrer que la suite $x_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ est convergente, soit L sa limite , on ne cherchera pas a la calculer pour le moment.
2) Montrer que $S_n(f)$ converge vers un réel S qu'on exprimera en fonction de L et $f'(0)$.
   Indication : On pourra utiliser la définition de f dérivable en 0.
3) En prenant $f(x) = \ln(1+x)$ expliciter S puis en déduire L.

Exercice 16. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou bien $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Exercice 17. .

1) Donner un équivalent de $\ln(\cos x)$ au voisinage de zéro.
2) Soit la fonction f définie sur $f : \begin{array}{rcl} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\cos x)^{\frac{1}{x}} \end{array}$.
   Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que son prolongement (toujours noté f) est dérivable en ce point.
3) Préciser $f'(0)$.

Exercice 18. Théorème de Rolle à l'infini.
Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet la même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution

Exercice 19. Continuité uniforme.

1) Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.
   a) Montrer que f est bornée.
   b) Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécéssairement les deux.
   c) Montrer que f est uniformément continue.
2) Soit I un intervalle borné et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle borné.
3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a + b|x|$.
   Indication : Prendre $\varepsilon = 1$ et majorer $|f(x) - f(0)|$.
4) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.
5) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 20. Point fixe.

1) Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue, montrer que f admet un point fixe.
2) Reprendre la même question en supposant cette fois f croissante.
   Indication : Penser à $sup(A)$ où $A = \{x \in [a,b]$ tel que $f(x) \geq x\}$
3) A-t-on le même résultat si f est décroissante .

Exercice 21. Étude d'une suite implicite.

Soit $a \in]0,1[$, ($n \in \mathbb{N}^*$ **on se propose d'étudier les solutions des équations** $f_n(x) = 0$ **où** $f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a$.

1) **Montrer que** $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ **est croissante.**

2) **Étudier** f_n **sur** $]0,1[$, **en déduire que l'équations** $f_n(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $]0,1[$ **que l'on notera** x_n.

3) **Dire pourquoi** $\dfrac{1}{2} \leq x_n \leq 1$, **pour tout** $n \geq 1$.

4) **Étudier le signe de** $f_n(x_{n+1})$ **en deduire que** (x_n) **est croissante puis qu'elle converge vers une limite finie** l.

5) **Montrer que** $l = 1$.

6) **En déduire que** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = a$.

7) **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **on a :** $x_n^n \geq a$.

8) **Montrer que** $\forall (x,y,b) \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **:**
$0 < b \leq y \leq x \Longrightarrow x - y \leq \dfrac{x^n - y^n}{nb^{n-1}}$.

9) **En déduire que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **on a :** $0 \leq \dfrac{x_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \dfrac{x_n^n - a}{na}$.

10) **En déduire que :** $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}$.

Exercice 22. Injectivité locale.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **dérivable et** $a \in \mathbb{R}$ **tel que** $f'(a) \neq 0$.

1) **Montrer qu'il existe un voisinage** V **de** a **tel que** $\forall\ x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.

2) **Si** f' **est continue au point** a, **montrer qu'il existe un voisinage** V **de** a **tel que** $f_{|V}$ **soit injective.**

Exercice 23. le TVI, l'injection et la continuité.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. **On dit que** f **vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :**
$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ **avec** $a < b, \forall\ y$ **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b), \exists\ x \in [a,b]$ **tel que** $f(x) = y$.

1) **Montrer que si** f **vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.**

2) **Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.**

Exercice 24. Propriété des valeurs intermédiaires pour f'**.**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **dérivable.**

1) **On suppose que :** $\forall\ x \in [a,b],\ \ f'(x) \neq 0$.
Montrer que f' **est de signe constant.**

2) **Dans le cas général, montrer que** $f'([a,b])$ **est un intervalle.**

Exercice 25. Théorème des accroissement finis généralises.

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continues dérivables sur** $]a,b[$ **telles que :**
$|f'(x)| \leq |g'(x)|, \quad \forall x \in]a,b[$
Montrer que : $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$

Exercice 26. Problème d'emballage.

Une usine fabrique des boites parallélipipèdiques sans couvercle de la façon suivante : on prend une feuille rectangulaire de carton de cotes a **et** $b < a$ **puis on découpe de chaque coin un carre de cote** x **puis on rabat les morceau ainsi obtenues, quelle est la valeur de** x **qui réalise un volume maximal**

Exercice 27. Étude des extremums et zéros d'une suite de fonctions.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$ on pose $f_n(x) = x^n + x + 1$.

1) Etudier le signe de f'_{2n} sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que f_{2n} atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en $a_n = -\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2n}}$.
3) On pose $f_{2n}(a_n) = m_n$, montrer que : $-1 < a_n < 0$ et $m_n > 0$.
4) En déduire les limites de a_n et m_n.
5) Pour tout réel $x > 0$ tel que $x \neq \frac{1}{2}$, on pose : $f(x) = -\sqrt[2x-1]{\frac{1}{2x}}$.
   Trouver une fonction g telle que $f'(x) = \frac{f(x)g(x)}{(2x-1)^2}$.
6) Étudier le signe de g en déduire que f est décroissante.
7) En déduire que (a_n) est monotone.
8) Étudier f_{2n+1}, en déduire que l'équation $f_{2n+1}(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera b_n, vérifier que $-1 < b_n < -\frac{1}{2}$.
9) Calculer $f_{2n+1}(b_{n+1})$, en déduire que (b_n) est décroissante puis qu'elle converge.
10) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -1$, en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n^{2n+1} = 0$.

Exercice 28. Dérivabilité uniforme.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Démontrer que : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tel que $\forall\, x, y \in [a, b]$,

$0 < |x - y| < \delta \Longrightarrow \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| \leq \varepsilon.$

Exercice 29. Étude d'une suite récurrente.

On pose $x_0 = \dfrac{3}{2}$

$x_{n+1} = x_n \left(2 - \ln(x_n)\right), \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (x_n) est bien definie.
   On pourra montrer par récurrence que $0 < x_n \leq e$
2) Montrer que (x_n) est croissante.
3) En déduire que (x_n) est convergente, preciser sa limite.
4) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in [2, e]^2 : \left| \ln(y) - \ln(x) - \frac{y - x}{x} \right| \leq \frac{(y - x)^2}{4}$$

5) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , |x_{n+1} - e| \leq \frac{3}{4} |x_n - e|^2$.
6) En deduire les 5 chiffres aprés la virgule de e .

Exercice 30. Étude d'une suite implicite.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation : $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une solution unique dans $]0, 1[$ que l'on notera x_n.
   Indication : On pourra penser à utiliser le TVI sur $[0, 1]$ ***pour la fonction*** $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$.
2) Montrer que (x_n) est monotone puis convergente.
3) Calculer x_2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$, en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Exercice 31. Étude d'une suite implicite. Pour tout entier n et réel x on pose $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n - 1$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0, 1]$ que l'on notera x_n.
2) Calculer $f_{n+1}(x_n)$, en déduire que (x_n) est décroissante puis qu'elle converge.
3) Montrer que pour x différent de 1 on a :
$$f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - 1$$
4) Calculer x_2, puis en déduire les limites des suites suivantes $(x_n^n), (nx_n^n), (x_n)$.

Exercice 32. Distance à la corde.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :
$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
Indication : Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ ***où*** λ ***est choisi de sorte que*** $g(c) = 0$.
2) Cas général : Soit $c \in]a, b[$.
Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
3) En déduire la distance de la corde à la courbe en tout point, puis une majoration de cette distance.

Exercice 33. Cordes de longueur $\frac{1}{n}$.
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
3) Trouver une fonction f telle que : $\forall\ x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$, $f(x) \neq f\left(x + \frac{2}{5}\right)$.
4) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que :
$\forall\ b \in]0, a],\ \exists\ x \in [0, 1-b]$ tel que $f(x) = f(x+b)$.

Exercice 34. Théroème de Rolle successif.

1) soit $n \in \mathbb{N}^*, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ qui s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$, montrer alors que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
Indication : Penser à utiliser le théorème de Rolle plusieurs fois.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $a_1 < a_2 < .... < a_n$ des nombres reéls deux à deux distincts et f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a_1, a_n]$ qui s'annule sur tous les a_i, montrer que :
$\forall x \in]a_1, a_n[\setminus \{a_k$ tel que $1 \leq k \leq n\}$ $\exists c_x \in]a_1, a_n[$ tel que $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$.
Indication on pourra fixer x ***et utiliser (1) pour la fonction*** $g(t) = f(t) - A \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)$ ***avec*** A ***nombre réel choisi tel que :*** $g(x) = 0$.

Exercice 35. Écart à un polynôme interpolateur.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange de degré inférieur à $n-1$, prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i, on dit qu'il interpolle f aux points a_i. On pose $Q(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.
Montrer que : $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = P(b) + Q(b)f^{(n)}(c)$
***Indication : Considérer** $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ **où** λ **est choisi de sorte que** $g(b) = 0$.*

Exercice 36. Polynômes de Legendre.
On pose $f(t) = (t^2-1)^n$.

1) Montrer que : $\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 37. Règle de l'Hospital.
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\, x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
   Indication : Appliquer le théorème de Rolle à** $f - \lambda g$, **où** λ **est un réel bien choisi.
2) En déduire que si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l \qquad \textit{(Règle de l'Hospital).}$$
3) Application : déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 38. Fonctions complexes

1) a) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ montrer qu'il existe un unique complexe b de partie relle strictement positive tel que $b^2 = a$.
   b) On pose $\mathcal{P}^+ = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\left(\dfrac{z}{b}\right) > 0\right\}$, et
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{a}{z}\right) \end{array}$$
   Montrer que $\mathcal{P}^+$ est stable par f.
   c) On pose $z_0 = a, z_{n+1} = f(z_n), w_n = \dfrac{z_n - b}{z_n + b}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que z_n, w_n sont bien définies.
   d) Exprimer w_n en fonction de w_{n-1} puis en fonction de b, n.
   e) Montrer que $|w_0| < 1$, en déduire les limites de w_n, z_n.
2) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$.
   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa fonction dérivée .
   b) Montrer que f ne vérifie pas le ***TAF***

Exercice 39. Fonction périodique.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique càd : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

1) Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que cette limite est forcément finie et dans ce cas f est constante.
2) Si f est continue non constante, montrer que f a une plus petite période strictement positive.
3) Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Fin.