Feuille d'exercices : *Géométrie euclidienne*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du plan non colinéaire avec $\overrightarrow{i}$, p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et q celle sur $\mathbb{R}\overrightarrow{i}$*

1) *Montrer que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ on a :*
$p(\overrightarrow{x}) = <\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}> \overrightarrow{u} \quad , \quad q(\overrightarrow{x}) = <\overrightarrow{x}, \overrightarrow{i}> \overrightarrow{i}$

2) *On pose $s = p + q - 2p \circ q$, montrer que s est une similitude d'origine O de rapport $\sin(\theta)$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ où $\theta = \widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}$.*
(indication : penser à l'écriture complexe)

Exercice 2. *Reconnaitre les transformations définies par leurs expressions analytiques dans le repère canonique :*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = z - 2 \\ y' = x \\ z' = y \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} x' = y - 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = x + 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3. *Trouver le réel a pour que*

$$D_1 \left\{\begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y = z + 2 \end{array}\right. \quad \text{et } D_2 \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{array}\right.$$

soient coplanaires, donner l'équation du plan les contenant

Exercice 4. *Déterminer l'angle entre $\overrightarrow{u}$(1,2,1) et $\overrightarrow{v}$(2,1,-1).*

Exercice 5. .

1) *Reconnaitre l'équipotentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par :*
$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{u}$ *où A, B deux points et $\overrightarrow{u}$ vecteur de $\mathbb{R}^3$ fixes.*

2) *Application numérique : $A(1,2,-1)$, $B(1,0,1)$, $\overrightarrow{u}(2,-1,2)$*

Exercice 6. *Soit D_1 la droite passant par $A(0,1,1)$ et $B(1,0,1)$ et D_2 celle d'équations*

$$D_2 \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{array}\right.$$

1) *Donner l'équation cartésienne de D_1.*

2) *Donner l'équation cartésienne de D perpendiculaire commune de D_1 et D_2.*

3) *En déduire $d(D_1, D_2)$.*

Exercice 7. *Donner l'écriture complexe de la similitude qui transforme $A(1,1)$ en $B(-3,-3)$ et $A'(2,1)$ en $B'(2,-1)$, en déduire l'image de $M(1,2)$ par cette transformation.*

Exercice 8. *Reconnaitre les applications affines d'expression analytique dans le repère canonique :*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{array}\right.$$

Exercice 9. ***Perpendiculaire commune de deux droites, 1ère méthode***

1) *Soient* D_1 *et* D_2 *deux droites de* $\mathbb{R}^3$ *passant par* A_1 *et* A_2 *et dirigées par* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$ *respectivement.*
Montrer que la droite D *dirigée par :* $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ *passant par* $H_1 \in D_1$ *tel que :* $\overrightarrow{A_1H_1} = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{A_1A_2}\ ,\ \overrightarrow{u_1} - \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle \overrightarrow{u_2} \right\rangle}{1 - \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle^2} \overrightarrow{u_1}$ *est perpendiculaire commune à* D_1 *et* D_2.

2) *Application numérique : Soient* D_1 *et* D_2 *les droites de* $\mathbb{R}^3$ *d'équations respectives :*

$$D_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

Donner la droite de leur perpendiculaire commune puis en deduire $d(D_1, D_2)$.

Exercice 10. ***Perpendiculaire commune de deux droites, 2éme méthode***

Soient D_1 *et* D_2 *les droites de* $\mathbb{R}^3$ *d'équations respectives*

$$D_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad ; D_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

1) *Donner* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur orthogonal à la fois a* D_1 *et* D_2.

2) *Donner l'équation du plan* π_1 *contenant* D_1 *tel que* $\overrightarrow{u} // \pi_1$.

3) *Donner l'équation du plan* π_2 *contenant* D_2 *tel que* $\overrightarrow{u} // \pi_2$.

4) *Vérifier que la droite* $D = \pi_1 \cap \pi_2$ *est perpendiculaire commune à* D_1 *et* D_2.

5) *En déduire* $d(D_1, D_2)$.

6) *Vérifier ce résultat a l'aide de la méthode de l'exercice précédent.*

Exercice 11. ***Théorème de Ménélaüs.***

Soit ABC *un triangle et trois points* $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, *distincts de* A, B, C.

1) *Montrer que* P, Q, R *sont alignés si et seulement si* $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \dfrac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.

2) *Dans ce cas, montrer que* $P' = \dfrac{P + C}{2}$, $Q' = \dfrac{Q + A}{2}$, *et* $R' = \dfrac{R + B}{2}$ *sont aussi alignés.*

Exercice 12. ***Cercle stable par une application affine.***

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ *un cercle du plan et* f *une application affine telle que* $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. *Montrer que* f *est une isométrie de point fixe* O.

Exercice 13. ***Cercle circonscrit.***

Soit ABC *un triangle. On note :* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1) *Montrer que pour tout point* M *du cercle* (ABC), *on a :*

$$a \cos \alpha MA^2 + b \cos \beta MB^2 + c \cos \gamma MC^2 = abc.$$

2) *En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle* (ABC).

Exercice 14. ***Cercle inscrit.***

Soit ABC *un triangle. On note :* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1) *Soit* A' *le pied de la bissectrice intérieure issue de* A.
Montrer que

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$$

2) *En déduire les coordonnées barycentriques de* I, *centre du cercle inscrit.*

Exercice 15. ***Orthocentre.***
Soit ABC un triangle non plat du plan. On note $\mathcal{D}_A$ (resp. $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$) la hauteur issue de A (resp. B, C). On note : $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1) *Montrer que $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ sont concourantes en un point que nous noterons H.*
2) *En utilisant le produit scalaire, montrer que $H \in \mathcal{D}_C$, appelé orthocentre de (ABC)*
3) *Soit A' le pied de la hauteur issue de A. Calculer* $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.
4) *En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H.*

Exercice 16. *Soient A, B, C, D, E cinq points de l'espace et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que :*

1) $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\|$.
2) $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$.

Exercice 17. ***Fonction numérique de Leibniz.***
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
Quels sont les points M du plan (ABC) tels que

$$MA^2 + a^2 = 2(MB^2 + MC^2)$$

Exercice 18. ***Cercle circonscrit à un triangle.***
Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère affine (ABC).
Montrer que :
$$M \in \mathcal{C} \iff xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = 0 \iff xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = 0$$

Exercice 19. ***Point équidistant d'une famille de droites.***
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites D_λ.

Exercice 20. ***Bissectrice de deux droites.***
Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O.
On note $\mathcal{H} = \{M$ tel que $d(M, D) = d(M, D')\}$.

1) *Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D, D'))*
2) *Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathcal{H}$*
3) *Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathcal{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathcal{H}$.*

Exercice 21. ***Coordonnées barycentriques*.**
Soit ABC un triangle non plat du plan et M un point du plan. On dit que (α, β, γ) est un système de coordonn"ées barycentriques de M dans (A, B, C) lorsque $\alpha + \beta + \gamma$ est non nul et M est le barycentre de A, B et C affect"s des coefficients α, β, γ.

1) *Montrer que tout point M du plan possède un et un seul système de coordonnées barycentriques (α, β, γ) vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$.*
2) *En déduire que deux triplets (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont des systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point si et seulement si ils sont proportionnels.*
3) *Montrer que* $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$
4) *En déduire que* $(\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$ *est un système de coordonnées barycentriques de M.*

Fin.