CPGE My Youssef, Rabat

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم
و قل إعملوا فسيرى اللّه عملكم و رسوله و المؤ منون

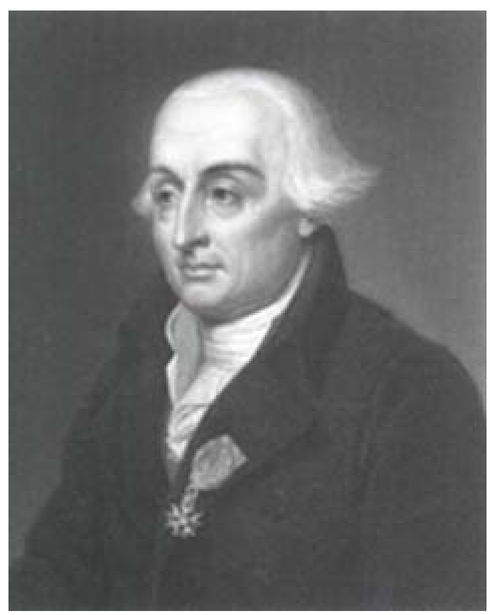
صدق اللّه العظيم

Feuille d'exercices: *Géomètrie euclidienne du plan et de l'espace*

4 janvier 2009

Blague du jour
Un biologiste, un physicien, un mathématicien et un informaticien discutent, pour déterminer quel est le plus vieux métier du monde.
Le biologiste proteste : avant l'homme, il a y avait des animaux, les plantes, tout l'écosystème, qu'il fallait et ça, c'est du travail de biologiste.
Le physicien : oui, mais avant ça il y avait les planètes, les étoiles, mettre en relation tout ça ! ! et c'est de la physique ! Le mathématicien : certes, mais pour former ces planètes et tout, il faut des lois, il faut de l'ordre, pour avoir quelque chose à partir du chaos. Et quoi mieux que les maths incarnent cet ordre ?

mathématicien du jour ***Lagrange***
Joseph Louis, comte de Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrange en italien) (1736-1813) est un mathématicien et astronome italien. Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française)
Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et le théorème de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. Son nom figure partout en mathématiques. On lui doit le théorème de Lagrange sur la théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange, la fonction de Lagrange ainsi que les équations de Lagrange en mécanique analytique. Il élabore le système métrique avec Lavoisier.
Il participe à la création de l'Ecole Normale (1795), de l'Ecole polytechnique (1794). Il est aussi le fondateur de l'Académie de Turin (1758).
La vie privée de Lagrange est peut-être moins heureuse. Il souffre parfois de dépression, divorce et se remarie beaucoup et n'a pas d'enfants.



Exercice 1 . **Trouver le réel** a **pour que** $D_1\left\{\begin{array}{l} x-2z=1 \\ y=z+2 \end{array}\right.$ **et** $D_2\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{array}\right.$ **soient coplanaires, donner l'équation du plan les contenant**

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

Exercice 2 . **Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du plan non colinéaire avec $\overrightarrow{i}$, p la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et q celle sur $\mathbb{R}\overrightarrow{i}$**

1) **Montrer que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ on a :**
$p(\overrightarrow{x}) = <\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}> \overrightarrow{u} \quad , \quad q(\overrightarrow{x}) = <\overrightarrow{x}, \overrightarrow{i}> \overrightarrow{i}$
2) **On pose $s = p + q - 2p \circ q$, montrer que s est une similitude d'origine O de rapport $\sin(\theta)$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ où $\theta = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}})$.**
(*indication* : penser à l'écriture complexe)

Exercice 3 .

1) **Reconnaitre l'équipotentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par :**
$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{u}$ **où A, B deux points et $\overrightarrow{u}$ vecteur de $\mathbb{R}^3$ fixes.**
2) ***Application numérique* : $A(1, 2, -1), B(1, 0, 1), \overrightarrow{u}(2, -1, 2)$**

Exercice 4 . ***Théorème de Ménélaüs.***
Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A, B, C.

1) **Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$**
2) **Dans ce cas, montrer que $P' = \frac{P+C}{2}$, $Q' = \frac{Q+A}{2}$, et $R' = \frac{R+B}{2}$ sont aussi alignés.**

Exercice 5 . ***Cercle circonscrit.***
Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\beta \equiv (\overline{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$, $\gamma \equiv (\overline{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

1) **Montrer que pour tout point M du cercle (ABC), on a :**
$$a \cos \alpha MA^2 + b \cos \beta MB^2 + c \cos \gamma MC^2 = abc.$$
2) **En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle (ABC).**

Exercice 6 . ***Cercle inscrit.***
Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1) **Soit A' le pied de la bissectrice intérieure issue de A.**
Montrer que
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$$
2) **En déduire les coordonnées barycentriques de I, centre du cercle inscrit.**

Exercice 7 . ***Orthocentre.***
Soit ABC un triangle non plat du plan. On note $\mathcal{D}_A$ (resp. $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$) la hauteur issue de A (resp. B, C). On note : $\alpha \equiv (\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\beta \equiv (\overline{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$, $\gamma \equiv (\overline{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

1) **Montrer que $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ sont concourantes en un point que nous noterons H.**
2) **En utilisant le produit scalaire, montrer que $H \in \mathcal{D}_C$, appelé orthocentre de (ABC)**
3) **Soit A' le pied de la hauteur issue de A. Calculer $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.**
4) **En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H.**

Exercice 8 . **Soient A, B, C, D, E cinq points de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.**
Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que :

1) $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\|$.
2) $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$.

Exercice 9 . ***Fonction numérique de Leibniz.***
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Quels sont les points M du plan (ABC) tels que

$$MA^2 + a^2 = 2(MB^2 + MC^2)$$

Exercice 10 . ***Cercle circonscrit à un triangle.***
Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère affine (ABC).
Montrer que : $M \in \mathcal{C} \iff xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = 0$
$\iff xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = 0$

Exercice 11 . ***Point équidistant d'une famille de droites.***
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites D_λ.

Exercice 12 . ***Bissectrice de deux droites.***
Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O.
On note $\mathcal{H} = \{M$ tel que $d(M, D) = d(M, D')\}$.

1) **Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D, D'))**
2) **Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathcal{H}$**
3) **Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathcal{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathcal{H}$.**

Exercice 13 . ***Coordonnées barycentriques.***
Soit ABC un triangle non plat du plan et M un point du plan. On dit que (α, β, γ) est un système de coordonn"ées barycentriques de M dans (A, B, C) lorsque $\alpha + \beta + \gamma$ est non nul et M est le barycentre de A, B et C affect"s des coefficients α, β, γ.

1) **Montrer que tout point M du plan possède un et un seul système de coordonnées barycentriques (α, β, γ) vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$.**
2) **En déduire que deux triplets (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont des systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point si et seulement si ils sont proportionnels.**
3) **Montrer que** $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$
4) **En déduire que** $(\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$ **est un système de coordonnées barycentriques de M.**

Fin
Á la prochaine