Feuille d'exercices : *Géométrie euclidienne*

Prépas PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

1) Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du plan non colinéaire avec $\overrightarrow{i}$, p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et q celle sur $\mathbb{R}\overrightarrow{i}$

a) Montrer que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ on a :
$p(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} > \overrightarrow{u} \quad , \quad q(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{i} > \overrightarrow{i}$

b) On pose $s = p + q - 2p \circ q$, montrer que s est une similitude d'origine O de rapport $\sin(\theta)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ où $\theta = \widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}$.
(*indication* : penser à l'écriture complexe)

2) Soit ξ espace affine euclidien de dimension $p = 2$ ou $p = 3$, soit $n \in \mathbb{N}, (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ famille de points de ξ deux à deux distincts et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres réels. Pour tout point $M \in \xi$ on pose :

$\varphi(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2$ (fonction scalaire de *Leibniz*).

$\vec{f}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ (fonction vectorielle de *Leibniz*)

a) Reconnaître l'application affine, g définie par :

$$\begin{array}{rccl} g: & \xi & \longrightarrow & \xi \\ & M & \longmapsto & M' \text{ tel que } \overrightarrow{OM'} = \vec{f}(M) \end{array}$$

Distinguer les cas : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$)

b) On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, et on pose $G = Barycentre(A_i(a_i)_{1 \leq i \leq n})$.
Montrer que : $\varphi(M) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MG^2 + \varphi(G)$

c) On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ montrer que :
$\varphi(M) = \varphi(O) + < 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{u} >$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur fixe à déterminer.

d) Reconnaître l'équipotentielle $\{M \in \xi / \varphi(M) = \lambda\}$ où λ réel donné
Distinguer les cas $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$)

e) On suppose dans la suite que $p = 2$ et $n = 3$ les point sont non alignés et M point du plan.

i. Montrer que M s'écrit de façon unique sous la forme :
$M = Barycentre(A_i(a_i)_{1 \leq i \leq 3})$ où a_i réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$

ii. Montrer que :
$\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i\right) \vec{f}(M) = a_2 a_3 (A_2 A_3)^2 + a_1 a_3 (A_1 A_3)^2 + a_2 a_1 (A_2 A_1)^2$.
(on pourra utiliser (b)).

iii. En déduire que M appartient au cercle circonscrit du triangle $(A_1A_2A_3)$ ssi : $a_2a_3\left(A_2A_3\right)^2+a_1a_3\left(A_1A_3\right)^2+a_2a_1\left(A_2A_1\right)^2=0$ *(équation barycentrique du cercle)*

iv. Donner l'équation cartésienne du cercle circonscrit du triangle $(A_1A_2A_3)$ si $A_1=(1,1), A_2=(-1,2)$ et $A_3=(1,0)$

3) *Perpendiculaire commune de deux droites, 1ère méthode*

a) Soient D_1 et D_2 deux droites de $\mathbb{R}^3$ passant par A_1 et A_2 et dirigées par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ respectivement.
Montrer que la droite D dirigée par : $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}$ passant par $H_1\in D_1$ tel que : $\overrightarrow{A_1H_1}=\dfrac{\left\langle \overrightarrow{A_1A_2}\ ,\ \overrightarrow{u_1}-\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\rangle\,\overrightarrow{u_2}\right\rangle}{1-\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\rangle^2}\,\overrightarrow{u_1}$ est perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

b) *Application numérique :* Soient D_1 et D_2 les droites de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives :

$$D_1:\begin{cases}2x+y+z=2\\ x+y+z=1\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x-y+z=4\end{cases}$$

Donner la droite de leur perpendiculaire commune puis en deduire $d(D_1,D_2)$.

4) *Perpendiculaire commune de deux droites, 2éme méthode*
Soient D_1 et D_2 les droites de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives

$$D_1:\begin{cases}2x+y+z=2\\ x+y+z=1\end{cases}\ ;D_2:\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x-y+z=4\end{cases}$$

a) Donner $\overrightarrow{u}$ un vecteur orthogonal à la fois a D_1 et D_2.

b) Donner l'équation du plan π_1 contenant D_1 tel que $\overrightarrow{u}//\pi_1$.

c) Donner l'équation du plan π_2 contenant D_2 tel que $\overrightarrow{u}//\pi_2$.

d) Vérifier que la droite $D=\pi_1\cap\pi_2$ est perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

e) En déduire $d(D_1,D_2)$.

f) Vérifier ce résultat a l'aide de la méthode de l'exercice précédent.

5) Reconnaître les transformations définies par leurs expressions analytiques dans le repère canonique :

$$\begin{cases}x'=z-2\\ y'=x\\ z'=y\end{cases}\ ;\begin{cases}x'=y-2\\ y'=z+1\\ z'=x+1\end{cases}.$$

6) Trouver le réel a pour que

$$D_1\begin{cases}x-2z=1\\ y=z+2\end{cases}\ \text{et}\ D_2\begin{cases}x+y+z=1\\ x-2y+2z=a\end{cases}$$

soient coplanaires, donner l'équation du plan les contenant

7) a) Reconnaître l'équipotentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{u}$ où A,B deux points et $\overrightarrow{u}$ vecteur de $\mathbb{R}^3$ fixes.

b) *Application numérique* : $A\left(1,2,-1\right), B\left(1,0,1\right), \overrightarrow{u}\left(2,-1,2\right)$

8) Soit D_1 la droite passant par $A(0,1,1)$ et $B(1,0,1)$ et D_2 celle d'équations

$$D_2\begin{cases}x+2y+z+1=0\\ x+y-z+2=0\end{cases}$$

a) Donner l'équation cartésienne de D_1.

b) Donner l'équation cartésienne de D perpendiculaire commune de D_1 et D_2.

c) En déduire $d(D_1,D_2)$.

9) Déterminer l'angle entre $\overrightarrow{u}$(1,2,1) et $\overrightarrow{v}$(2,1,-1).

10) Donner l'écriture complexe de la similitude qui transforme $A(1,1)$ en $B(-3,-3)$ et $A'(2,1)$ en $B'(2,-1)$, en déduire l'image de $M(1,2)$ par cette transformation.

11) Reconnaître les applications affines d'expression analytique dans le repère canonique :

$$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y+1\\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y+2\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y+1\\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y+2\end{cases}$$

Fin.