CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Géomètrie euclidienne du plan et de l'espace*

Lundi 15 Juin 2009
Durée : 4 heures

Blague du jour :
• Docteur ! Mon mari vous doit la vie !
- Et mes honoraires aussi, madame !
• Docteur ! docteur ! Il ne me reste plus que 59 secondes à vivre !
- Une minute, j'arrive !

Mathématicien du jour — ***Lobatchevski***
Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) est un mathématicien russe né dans une famille pauvre. Son père meurt quand il a sept ans. Il commença ses études en medecine, avant s'orienter aux mathématiques. Il fût doyen d'une université pendant 19 ansn sans que ça l'empêche de poursuivre ses travaux de recherche. Il met au point une géométrie non-euclidienne, appelée géométrie hyperbolique, dans laquelle (par exemple) on peut tracer une infinité de parallèles à une droite donnée et passant par un même point.

1 Géomètrie euclidienne du plan.

Exercice 1 . **Reconnaitre les applications affines d'expression analytique dans le repère canonique :**

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{cases}$$

Exercice 2 . ***Bissectrice de deux droites.***
Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O. On note $\mathcal{H} = \{M$ tq $d(M, D) = d(M, D')\}$.

1) **Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D, D'))**
2) **Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathcal{H}$**
3) **Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathcal{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathcal{H}$.**

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

Exercice 3 . ***Cercle stable par une application affine.***
Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Montrer que f est une isométrie de point fixe O.

Exercice 4 . ***Trois figures isométriques.***
Trois figures F_1, F_2, F_3 se déduisent l'une de l'autre par rotations. Montrer qu'il existe une figure F dont F_1, F_2, F_3 se déduisent par symétries axiales.

Exercice 5 . ***Sous-groupes finis de déplacements.***

1) **Soit G un sous-groupe fini de déplacements du plan.**
   a) **Montrer que G est constitué uniquement de rotations.**
   b) **Soient $f, g \in G$. Montrer que f et g ont même centre (étudier $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$).**
   c) **Prouver enfin que G est cyclique.**
2) **Soit G un sous groupe fini d'ordre p d'isométries du plan, non toutes positives.**
   a) **Montrer que G contient autant d'isométries positives que négatives.**
   b) **Montrer que G est un groupe diédral (groupe d'isotropie d'un polygone régulier).**

2 Géomètrie euclidienne de l'espace.

Exercice 6 . **Reconnaitre les transformations définies par leurs expressions analytiques dans le repère canonique :**

$$\begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = x \\ z' = y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = x + 1 \end{cases}$$

Exercice 7 . ***CNS pour que deux vissages commutent.***
Soient f, g deux vissages d'angles $\neq \pi$. Trouver une CNS pour que $f \circ g = g \circ f$. (On étudiera $f \circ g \circ f^{-1}$)

Exercice 8 . ***Composée de 3 demi-tours.***
Soient D_1, D_2, D_3, trois droites, et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les $\frac{1}{2}$-tours correspondants.
Démontrer que $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour si et seulement si D_1, D_2, D_3 ont une perpendiculaire commune ou sont parallèles.

Exercice 9 . ***Composée de demi-tours par rapport aux arêtes d'un tétraèdre.***
Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et d_{AB}, d_{AC}, d_{AD} les $\frac{1}{2}$-tours autour des droites $(AB), (AC), (AD)$. Simplifier $f = d_{AB} \circ d_{AC} \circ d_{AD}$.

Exercice 10 . ***Isométries transformant un triangle en un triangle donné.***
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?
Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.

Fin
à la prochaine