Résumé de cours : *Groupes*
Feuille d'exercices : *Cycliques.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

1 Résumé de cours.

Ordre d'un groupe.

Définition 1. *Si G est un groupe, son cardinal est appellé alors l'ordre de G et noté $o(G)$.*

Vocabulaire.

Tout groupe fini est dit d'ordre fini.

Groupe engendré par un élément.

Définition 2. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, on appelle sous groupe engendré par a le sous-groupe de G, noté $< a >$ formé par les puissances de a.*
Autrement dit : $< a >= \{a^n \text{ tel que : } n \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque.

Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors $< a >$ est le plus petit sous-groupe de G contenant a.

Autrement dit : Si H est un sous-groupe de G, $a \in H \Longrightarrow < a > \subset H$.

Ordre d'un élément d'un groupe.

Définition 3. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$. L'ordre du sous-groupe engendré par a est aussi appelé l'ordre de a, et noté $o(a)$.*
Autrement dit : $o(< a >) = o(a)$.

Remarque.

Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors $o(a) = 1 \Longleftrightarrow a = e$, où e l'élément neutre de G.

Vocabulaire.

Un élément d'un groupe est dit d'ordre fini, lorsqu'il engendre un groupe fini.

Théoréme 1. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors :*
a est d'ordre fini $\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a^n = e$.

Théoréme 2. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors :*
a est d'ordre fini $\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a^n = e$.

Théoréme 3. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G, n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$o(a) = n \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} i) & a^n = e \\ ii) & \forall k \in \mathbb{N}, \quad a^k = e \Longrightarrow n \text{ divise } k \end{array}.$$

Groupes monogènes.

Définition 4. *Un groupe G est dit monogène s'il est engendré par l'un de ses éléments.*
Autrement dit : $\exists a \in G$ tel que : $G =< a >$.

Définition 5. *Un groupe G est dit cyclique s'il est monogène et fini.*

2 Exercices.

Exercice 1. *Soit G un groupe et a, b deux éléments fixes de G, d'ordre finis tel que : $ab = ba$.*
Montrer que ab est d'ordre fini avec $o(ab) = o(a) \vee o(b)$.

Exercice 2. *Soit G un groupe fini et a un élément de G. Montrer que $o(a^n) = \dfrac{o(a)}{o(a) \wedge n}$.*

Exercice 3. *Soit G un groupe monogène engendré par un élément a, et H un sous-groupe de G.*

1) *Montrer que l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (G, .) \\ n & \longmapsto & a^n \end{array}$ est un morphisme de groupe.*

2) *En déduire que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que : $\varphi^{-1}(H) = p\mathbb{Z}$.*

3) *En déduire que H est engendré par a^p.*

Conclusion : Tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 4. *Soit G un groupe abélien, fini de cardinal n, et a un élément de G.*

1) *Montrer que l'application $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a.x \end{array}$ est bijective, en déduire que $\varphi_a(G) = G$*

2) *En faisant le produit des éléments de G et ceux de $\varphi_a(G)$, montrer que $a^n = e$.*

3) *En déduire que $o(a)$ divise n.*

4) *En deduire que le cardinal de tout sous groupe de G divise celui de G.*

Exercice 5. *Soit G un groupe, dont les seuls sous-groupe sont l'élément neutre et lui même.*
Montrer que G est monogène, puis fini et que son cardinal est premier.

Exercice 6. *Soit G_1 et G_2 deux groupes, on muni leur produit cartesien $G_1 \times G_2$ de sa structres de groupe canonique, en posant $(a, b).(c, d) = (a.c, b.d)$. On suppose de plus qu'il sont cycliques.*

1) *Soit $(a, b) \in G_1 \times G_2$, montrer que $o(a, b) = o(a) \vee o(b)$.*

2) *En déduire que :*
$G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si card$(G_1) \wedge$ card$(G_2) = 1$.

Exercice 7. *Soit G un groupe et a, b deux éléments fixes de G.*

1) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (ab)^{n+1} = a(ba)^n b$.*

2) *En déduire que ab est d'ordre fini si et seulement si ba est d'ordre fini avec $o(ab) = o(ba)$.*

Exercice 8. *Soit G un groupe et a, b deux éléments fixes de G.*

1) *Montrer que a d'ordre fini si et seulement si a^{-1} est d'ordre fini avec $o(a^{-1}) = o(a)$.*

2) *Montrer que a d'ordre fini si et seulement si aba^{-1} est d'ordre fini avec $o(aba^{-1}) = o(a)$.*

Exercice 9. *.*

1) *Montrer que l'ensemble $G = \{z \in \mathbb{C}$ tel que : $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $z^{2^n} = 1$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ infini non monogène.*

2) *Montrer que tout sous-groupe fini du groupe G est cyclique.*

Exercice 10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = k \wedge n$.*

1) *Déterminer l'ordre de $\dot{k}$ dans G.*

2) *Montrer que $\dot{k}$ et $\dot{d}$ engendrent le même sous-groupe de G.*

3) *Quels sont tous les sous-groupes de G ?*

Exercice 11. *Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe et $a \in G_1$, d'ordre fini.*
Montrer que $f(a)$ est d'ordre fini avec $o(f(a))$ divise $o(a)$ avec égalité si f est bijective.

Exercice 12. ***Théorème du rang.***
Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes où G est un groupe fini.
Montrer que $card(\mathrm{Ker} f) \times card(\mathrm{Im} f) = card(G)$.

Exercice 13. ***Décomposition d'un élément d'ordre fini.***
Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$ d'ordre np avec $n \wedge p = 1$.
Montrer qu'il existe $b, c \in G$ uniques tels que b est d'ordre n, c est d'ordre p, $a = bc = cb$.
Indication : utiliser la formule de Bézout.

Exercice 14. ***Groupe d'ordre pair.***
Soit G un groupe fini de cardinal pair.

1) *Montrer que l'ensemble des x tel que : $x^2 \neq e$ est de cardinal pair.*

2) *Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre 2.*

Exercice 15. ***Groupe d'ordre impair.***
Soit G un groupe fini de cardinal impair.
Montrer que : $\forall\ x \in G,\ \exists!\ y \in G$ tel que : $x = y^2$.

Exercice 16. ***Groupe d'exposant 2.***
Soit G un groupe fini tel que : $\forall\ x \in G,\ x^2 = e$.

1) *Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).*

2) *Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que $cardK = 2cardH$.*

3) *En déduire que $cardG$ est une puissance de 2.*

Exercice 17. ***Théorème de Lagrange.***
Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par : $\forall\ x, y \in G,\ x \sim y \Longleftrightarrow \exists\ h \in H$ tel que : $x = hy$.

1) *Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.*

2) *Soit $a \in G$. Quelle est la classe de a ?*

3) *Soit $a \in G$. Montrer que $\dot{a}$ est équipotent à H.*

4) *En déduire que $cardH$ divise $cardG$ (Théorème de Lagrange).*

Exercice 18. ***Groupe d'ordre ab avec $a \wedge b = 1$.***
Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$.
On pose $A = \{x \in G$ tel que : $x^a = e\}$ et $B = \{x \in G$ tel que : $x^b = e\}$.

1) *Montrer que A et B sont des sous-groupes de G.*

2) *Montrer que $A \cap B = \{e\}$ et que tout élément $g \in G$ s'écrit de façon sous la forme $g = g_1 g_2$.*

Exercice 19. ***Caractérisation des sous groupes d'un groupe cyclique.***
Soit G un groupe cyclique d'ordre n, a un générateur de G, et $G_d = \{x \in G$ tel que : $x^d = 1\}$.

1) *Soit $(c, d) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $cd = n$, montrer que $G_d = < a^c >$ et card $G_d = d$*

2) *Soit H un sous groupe de G*

a) Justifier l'existence d'un plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a^p \in H$.

b) Montrer que $p \leq n$ et que $H = < a^p > = G_q$ où $pq = n$.

c) Déduire une bijection entre les sous groupes de G et les diviseurs de n.

3) *Application :*

a) Soit $k \in \mathbb{Z}$, déterminer en fonction de $n \wedge k$ le couple (p, q) réalisant :$pq = n$ et $< a^k > = < a^p > = G_q$.

b) Soit H un sous groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ montrer que :
$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $H = U_n$.