Feuille d'exercices : *Groupe symétrique*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلَهُ وَ المُؤ مِنُون
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^*$ tel que $p\leq n$ et $\sigma=(i_1,\dots,i_p)$ un p-cycle.

1) Montrer que : $\forall\,\alpha\in\mathcal{S}_n,\quad \alpha\sigma\alpha^{-1}=(\alpha(i_1),\dots,\alpha(i_p))$.
2) En déduire : (1 3 2)(1 2 3 4)(1 2 3).
3) Montrer que $o(\sigma)=p$.
4) Montrer que : $\forall\,k\in\mathbb{N}^*,\quad o(\sigma)^k=\dfrac{p}{p\wedge k}$.
5) En déduire que σ^k est un p-cycle $\iff k\wedge p=1$.
6) Calculer $(\ 1\ 2\ 3\ 4)^k$, pour $k=2,k=3$.

Exercice 2. .

1) Montrer que toute permutation dont le support est de cardinal 2 est une transposition.
2) Montrer que toute permutation dont le support est de cardinal 3 est une 3-cycle.
3) Peut-on généraliser pour une permutation dont le support est de cardinal superieur à 4.

Exercice 3. On définit sur $\mathcal{S}_n$ la relation suivante :

$$g\mathcal{R}f \iff \begin{array}{ll} i) & \exists h\in\mathcal{S}_n \text{ tel que } \mathrm{supp}(h)\cap\mathrm{supp}(g)=\emptyset \\ ii) & \mathrm{supp}(f)=\mathrm{supp}(g)\cup\mathrm{supp}(h) \text{ et } f=g\circ h \end{array}$$

On dit qu'une permutation f est irréductible quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall g\in\mathcal{S}_n,\quad g\mathcal{R}f\Longrightarrow g=f$ ou $g=id_{[|1,n|]}$.

1) Donner $\mathrm{supp}(id_{[|1,n|]})$.
2) Soit $f\in\mathcal{S}_n$, montrer que : $\mathrm{supp}(f)=\emptyset\iff f=id_{[|1,n|]}$.
   En déduire que : $id_{[|1,n|]}$ est irréductible.
3) Donner un exemple d'une permutation irréductible autre que $id_{[|1,n|]}$.
4) Soit $(g,h)\in\mathcal{S}_n^2$ tel que $\mathrm{supp}(g)\cap\mathrm{supp}(h)=\emptyset$.
   Montrer que : $\forall i\in[|1,n|],\quad i\in\mathrm{supp}(g)\iff h(i)\in\mathrm{supp}(g)$.
5) Soit $(g,f)\in\mathcal{S}_n^2$ tels que : $g\mathcal{R}f$.
   Montrer que : $\mathrm{supp}(f)=\mathrm{supp}(g)\cup supp(h)$, où h est la permutation citée dans la définition.
6) Soit $(h_1,h_2)\in\mathcal{S}_n$ tels que : $\mathrm{supp}(h_1)\cap\mathrm{supp}(h_2)=\emptyset$.
   Montrer que $\mathrm{supp}(h_1\circ h_2)\subset\mathrm{supp}(h_1)\cup\mathrm{supp}(h_2)$.
7) En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$
8) Montrer que : $\forall f\in\mathcal{S}_n\quad\exists p\in\mathbb{N}^*,\exists g_1,g_2,\dots,g_p$ permutations de $[|1,n|]$ irréductibles, à supports deux à deux disjoints telles que : $f=g_1\circ g_2\circ\dots\circ g_p$.
9) Soit $f\in\mathcal{S}_n$ irréductible, montre que f est un cycle.
   Étudier la réciproque.
10) A quel notions connues sur $\mathbb{N}$ ressemblent la relation $\mathcal{R}$ et les permutations irréductibles.