Feuille d'exercices : *Intégration sur un segment*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Dans tous les énoncés $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$

Exercice 1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, montrer que :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\ dt = 0$$

dans les cas suivants :

1) *f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.*

2) *f en escalier sur $[a,b]$.*

3) *f continue par morceaux sur $[a,b]$*

Exercice 2. *Soit $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que :*

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t)\ dt = \int_0^\pi f(t)\cos(t)\ dt = 0$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$ en changeant de signe.
On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 3. *Pour $(p,q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 (1-t^p)^{\frac{1}{q}} dt$.*
A l'aide d'une intégration par parties puis un changement de variable, montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$.

Exercice 4. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :*
$f(a+b-t) = f(t), \quad \forall t \in [a,b]$.

1) *Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.*

2) *Application :*
Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{1+\sin t}dt$.

Exercice 5. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.*

1) *Etudier sur $[0, b-a]$ les variations de la fonction G_a définie par : $G_a(x) = \displaystyle\int_x^{x+a} |t|dt$.*

2) *En déduire $\displaystyle\inf_{[0,b-a]} G_a$.*

3) *En utilisant le changement de variable $u = t + x$, montrer que*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M_1(f)F_{b-a}(x+a) \quad \text{avec } M_1(f) = \sup_{[a,b]} |f'|.$$

4) *En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M_1(f)\frac{(b-a)^2}{4}$.*

5) *Quand a-t-on l'égalité ?*

Exercice 6. ***Inégalité de Jensen.***
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue convexe.*
Démontrer que $g\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(f(t))\,dt.$

Exercice 7. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et* $\exists n \in \mathbb{N}$ *vérifiant*

$$\int_0^1 t^k f(t)dt = 0, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n.$$

1) *Montrer que* $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0, \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X].$

2) *Soit* $r_1, \ldots, r_p$ *les racines, distinctes de* f *dans* $[a, b]$ *dans lesquels* f *change de signe.*
Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(t - r_k)f(t)$ *garde un signe constant dans* $[a, b]$.

3) *Conclure que* f *s'annule au moins* $n + 1$ *fois dans* $[a, b]$ *en changeant de signe.*

Exercice 8. ***Moyenne géométrique.***
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. Montrer que :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_t^1 f(t)\,dt\right)$$

On pourra utiliser : $\forall\ x \geq -\dfrac{1}{2},\ x - x^2 \leq \ln x \leq x.$

Exercice 9. ***Maximum-minimum.***
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. *Étudier la convergence des suites* (a_n), (b_n) *définies par :* $a_0 = a, \quad b_0 = b$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \min(x, b_n)\,dx$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \max(x, a_n)\,dx$$

Exercice 10. *Soit* f *une fonction continue sur* $[0, 1]$ *telle que* $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. *Montrer que* f *possède un point fixe sur* $[0, 1]$.

Exercice 11. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.*
On pose $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\ dt$. *Montrer que* $g^{(n)} = f$.
Penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 12. ***Irrationalité de*** π ***et de*** e***.***
Soit $(p, q, n) \in \mathbb{N}^{*3}$, *on pose* $P_n(X) = \dfrac{X^n(qX-p)^n}{n!}$.

1) *Préciser les racines de* P_n *ainsi que leurs multiplicités .*

2) *Montrer que* $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq 2n.$

3) *En déduire que* $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq 2n.$
Penser à un changement de variable.

4) *On suppose* $\pi \in \mathbb{Q}$ *et on pose* $\pi = \dfrac{p}{q}$.

a) *En déduire de ce qui précéde que* $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt \in \mathbb{Z}.$

b) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt = 0.$

c) *Conclure que la suite* $\left(\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est stationnaire en 0.*

d) *Déduire une contradiction, puis conclure.*

5) *En raisonnant cette fois sur* $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)e^t dt$, *montrer que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 13. *On pose* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}dx$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}dx$$

1) *Calculer* $I+J$.

2) *Montrer que* $I=J$.

3) *En déduire* I *et* J.

Exercice 14. *Pour tout* $x \in [0,1]$, *on pose*

$$f_0(x) = 1$$
$$f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) *Montrer que les fonctions* f_n *sont bien définies.*

2) *Calculer* f_1, f_2, f_3.

3) *Montrer l'existence de deux suites réelles* $(a_n), (b_n)$ *vérifiant* $f_n(x) = a_n x^{b_n}$, $\forall x \in [0,1]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$.
On donnera b_n *en fonction de* n *et* a_{n+1} *en fonction de* a_n.

4) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \ln a_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln(1-2^{-k})$.

5) *Montrer que* $\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq -x - \ln(1-x) \leq \dfrac{x^2}{2(1-x)}$.

6) *En déduire que* $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |-2^k \ln(1-2^{-k}) - 1| \leq 2^{-k}$, *puis que* $\left|\ln a_n - \dfrac{n}{2^n}\right| \leq \dfrac{n}{2^n}$.

7) *En déduire pour tout* $x \in [0,1]$ *fixe, la limite de la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15. *Formule de la moyenne généralisée.*
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues,* f *positive.*

1) *Démontrer qu'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$$

2) *Si* f *ne s'annule pas, montrer que* $c \in]a,b[$.

3) *Application : Soit* f *continue au voisinage de* 0.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$.

Exercice 16. *Pour* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue on pose* $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$, *on se propose dans la suite d'étudier le comportement asymptotique de cette suite.*

1) *Donner* u_n *ainsi que sa limite dans les cas suivants :*
$f(x) = x$, $\quad f(x) = x^\alpha$, *avec* $\alpha \neq 0$, $\quad f(x) = x(1-x)$.

2) *Dans la suite on considère* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

a) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

c) *A l'aide d'une intégration par parties montrer que :*

$$1 - u_n = \frac{1}{n}\left(\ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n)dt\right)$$

d) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt \leq \frac{1}{n+1}$

e) *En déduire un encadrement de* u_{10} *à* 10^{-2} *prés.*

Exercice 17. ***Sommes de Riemann.***

Déterminer les limites des suites suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

3) $\displaystyle\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

4) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$,

on pourra utiliser l'égalité : $x \leq e^x - 1 \leq x + \dfrac{ex^2}{2}$, $\forall x \in [0,1]$.

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$

On pourra s'inspirer de l'exemple précedent.

6) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}$ *pour* $k \geq 2$ *fixé.*

7) $\dfrac{1}{n^2}\Big(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\Big)$.

8) $\sqrt{n\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)\dots\Big(1+\dfrac{n}{n}\Big)}$.

9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(\frac{3k\pi}{n})}$.

10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. *Donner un équivalent simple.*

11) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Où $A_1, A_2, \dots, A_n$ *les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre 0 et rayon 1.*

Exercice 18. ***Méthode des rectangles aux milieux.***

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$. *On fixe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose :*

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n},\ a_{k+\frac{1}{2}} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \text{ et } I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}}).$$

1) *Donner une interprétation géométrique de* I_n.

2) *Montrer que* $\displaystyle\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,\underset{\cdot}{t} - I_n\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ *où* $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$.

3) *Comparer la rapidité de convergence de cette méthode avec celle des trapèzes.*

Exercice 19. ***Intégrales de Wallis.***

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\ \ dt$.

1) *Comparer* I_n *et* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ \ dt$.

2) *En coupant* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *en* $[0,\alpha]$ *et* $\left[\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right]$, *démontrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3) *Chercher une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+2}.
En déduire I_{2k} *et* I_{2k+1} *en fonction de* k.

4) *Démontrer que* $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5) *Montrer que la suite* (I_n) *est décroissante*

6) *Démontrer que* $I_n \sim I_{n-1}$ *et en déduire un équivalent simple de* I_n *puis de* $\dbinom{2n}{n}$ *quand* $n \to \infty$.

Exercice 20. ***Calcul de primitives.***

La fonction	*Sa primitive*
$x^k \ln x$	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\Big(\ln x - \dfrac{1}{k+1}\Big)$
$\ln(1+x^2)$	$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$

Exercice 21. ***Calcul de primitives.***

1) *Fractions rationnelles.*

La fonction	*Sa primitive*
$\dfrac{1}{x^3-1}$	$\dfrac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert-\dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1)$ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
$\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\dfrac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert+\dfrac{1}{9}\ln(x^2+x+1)$ $+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{x}{3(x^3-1)}$

2) *Fonctions trigonométriques.*

La fonction	*Sa primitive*
$\dfrac{1}{\sin x\sin 4x}$	$-\dfrac{1}{4\sin x}+\dfrac{1}{8}\ln\left\lvert\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\rvert$ $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\rvert$
$\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\sin x\rvert$
$\cos x\sqrt{\cos 2x}$	$\dfrac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$
$\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x}$	$\dfrac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\dfrac{1}{2}\ln(1+\cos x)$ $-\dfrac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$

3) *Radicaux.*

La fonction	*Sa primitive*
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\sqrt{x^2-3x+2}$ $+\dfrac{5}{2}\ln\left\lvert 2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\rvert$
$\dfrac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-arcos\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ *poser* $x=1+2\cos\varphi$

Exercice 22. $\forall\, x>0$, *on pose* $F(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

1) *Montrer que* $\forall\, x>0,\quad F(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, *que peut-on alors dire à propos de la courbe de* F.

2) *Montrer que* $\forall\, x>0,\quad F(x)=\arctan(x)\ln x-\displaystyle\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt$

3) *Montrer que* $\lim\limits_{0^+}F$ *existe, et est finie.*

On la note dans la suite par $\displaystyle\int_1^0\frac{\ln t}{1+t^2}dt$, *on ne cherchera pas à la calculer mais plutôt à en donner une valeur approchée.*

On pose alors $\forall\, k\in\mathbb{N},\forall\, x>0,\quad I_k(x)=\displaystyle\int_1^x t^k\ln t\,dt$.

4) *Montrer que* $\forall\, x>0,\forall\, n\in\mathbb{N}$, *on a :*

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

5) *En déduire pour* $n\in\mathbb{N}, x\in]0,1]$ *la majoration suivante :*

$$\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right|\leq I_{2n+2}(x)$$

6) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}I_k(x)$

7) *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on pose* $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_1^0\frac{\ln t}{1+t^2}dt-u_n\right|\leq\dfrac{1}{(2n+3)^2}$.

8) *En déduire un encadrement de* $\displaystyle\int_1^0\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ *à* 10^{-2} *prés .*

Fin.