

FEUILLE D'EXERCICES : Calcul matriciel.

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Exercice 1. .

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 d'une projection dont on précisera le noyau et l'image.

2) Donner la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection p , sur D parallèlement à π où

$$D : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{et } \pi : x + y - z = 0.$$

Indication : Poser $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $p(X) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, utiliser les relations $p(X) \in \text{Im}(p) = D$, $p(X) - X \in \text{Ker}(p) = \pi$ pour trouver des relations entre x', y', z' et x, y, z puis en déduire la matrice de p .

3) Soit P la matrice d'un projecteur sur un ev de dimension finie montrer que $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P)$.

Indication : chercher une base où sa matrice s'exprime d'une façon simple.

Exercice 2.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$).

Exercice 3. .

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associée à

un endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, E , de dimension n , dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

a) Calculer $f(e_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

b) En déduire $f^2(e_k)$, pour tous $1 \leq k \leq n$, puis la forme de la matrice A^2 .

c) En déduire $f^p(e_k)$, pour tous $1 \leq k, p \leq n$, puis la forme de la matrice A^p .

d) En déduire que $f^n = 0$, puis que $A^n = 0$.

2) Inversement soit f un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, E , de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a) Justifier l'existence d'un $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

b) En déduire que la famille $\mathcal{B} = (f^{n-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$ est une base de E .

c) Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 4. Dans tout le problème $n \geq 2$.

- 1) Etudier sur \mathbb{R} suivant la parité de n les variations de $f_n : x \rightarrow x^{n+1} + x^n$.
- 2) Vérifier que $f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2$.
- 3) En déduire, suivant la parité de n , le nombre de solutions de l'équation : $f_n(x) = 2$.
- 4) Soit A la matrice carré d'ordre 2 formée par des 1 partout, trouver P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5) Soit E_n l'équation matricielle $X^{n+1} + X^n = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à celle de $(E'_n) : Y^{n+1} + Y^n = B$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 6) Montrer que $BY = YB$.
- 7) Si $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrer que $b=c=0$.
- 8) Quelles sont les valeurs possibles de a .
- 9) Discuter suivant les valeurs de n le nombre de solutions de (E_n) .

Exercice 5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- 1) Calculer $J(1)^2$ en fonction de $J(1)$.
- 2) Exprimer $J(\lambda)$ en fonction de $J(1)$ et I_n .
En déduire $J(\lambda)^2$ en fonction de $J(\lambda)$ et I_n .
- 3) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $J(\lambda)$ soit inversible, exprimer dans ce cas $J(\lambda)^{-1}$ en fonction de $J(\lambda)$.

Exercice 6. On note

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{A} = \{aU + bI_n, a, b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2)$$

- 1) Calculer U^2 , en déduire U^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que \mathcal{A} est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.
- 3) Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$.
Exprimer M^2 en fonction de M et I_n .
En déduire que M est inversible si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et dans ce cas $M^{-1} \in \mathcal{A}$.
- 4) Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I_n$.

Exercice 7. Calculer les puissances successives de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux nombres complexes.

Indication : On pourra écrire A sous la forme $aJ + bI_3$.

Exercice 8. .

- 1) Soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = X^t Y$.
 - a) Montrer que $\text{rg} A = 1$.
 - b) Calculer AX , en déduire les valeurs propres de A .
 - c) Conclure que A est diagonalisable.
- 2) Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg} A = 1$.
Montrer que $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = X^t Y$.
En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 9. On considère m un nombre complexe non nul, et on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer $(A + I_3)(A - 2I_3)$.
En déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1} .
- 2) Soit $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$, $C = -\frac{1}{3}(A - 2I_3)$.
Calculer B^2, C^2 , puis en déduire B^n, C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et I_3 .
- 4) Retrouver le résultat du c) en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par $(X + 1)(X - 2)$.

Exercice 10. Soit l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $P(X) \longmapsto P(X + 1)$

- 1) Calculer $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ où \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Dire comment inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{ij} = (-1)^{n-j} \binom{n-j}{i-1}$, avec la convention $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$.

- 1) Déterminer l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ ayant A pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Indication : commencer d'abord par calculer $u(1), u(X), \dots, u(X^{n-1})$, à partir de la matrice, puis en déduire $u(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
- 2) En déduire A^3 .

Exercice 12. Concours marocain, 2005 et 2006.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on définit l'endomorphisme de E , noté $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}e_i$
Avec $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, appelé symbole de Kroeneker.
 $= 0$ si $j \neq k$

On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n , dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, égal à 1.

- 1) Montrer que $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
- 2) Calculer $M_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$, en déduire que $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- 3) Soit $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ fixé, calculer pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire $E_{i,j}E_{k,l}$.
- 4) Exprimer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, puis en déduire les produits $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.
- 5) Application : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.
 - a) Montrer que :
 $AM = MA, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \implies A = \lambda I_n$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.
 - b) Calculer $\text{Tr}(AE_{k,l})$.
En déduire que : $\text{Tr}(AM) = 0, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \implies A = 0$.

Exercice 13. Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
 $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \text{tr}(AX)$
- 2) On suppose que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$.
 Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
 $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \lambda \text{tr}(X)$

Exercice 14. Commutant d'une matrice diagonale.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } AM = MA\}$, appelé commutant de A .

- 1) Montrer que \mathcal{C}_A est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2) Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.
 - a) Chercher \mathcal{C}_A .
 - b) Soit $\phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $M \mapsto MA - AM$
 Montrer que $\text{Im}(\phi)$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

Exercice 15. Matrices d'une permutation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$. Avec
 $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, appelé symbole de Kroeneker
 $= 0$ si $i \neq j$

- 1) Calculer P_σ , pour $n = 4$, $\sigma = (1\ 2)$, $\sigma = (1\ 2\ 3)$ et $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.
- 2) Montrer que $P_\sigma \cdot P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.
- 3) Calculer P_{id} , en déduire que P_σ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 16. Matrices en damier.

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est en damier si $a_{ij} = 0$ pour $j - i$ impair. On note par \mathcal{D} l'ensemble de telle matrices. Montrer que \mathcal{D} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 17. Matrices stochastiques.

Soit $\mathcal{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } : a_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \right\}$

- 1) Donner un exemple pour $n = 2$ et un pour $n = 3$.
- 2) Montrer que \mathcal{D} est stable par multiplication.
- 3) Démontrer les matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$ sont celles dont chaque colonne contient $n - 1$ fois 0 et une fois 1.
- 4) Montrer qu'il s'agit là d'une matrice de permutation.

Exercice 18. Matrices centrosymétriques.

Ce sont les matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
 $a_{n+1-i, n+1-j} = a_{i,j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$.

- 1) Donner un exemple pour $n = 2$ et un pour $n = 3$.
- 2) Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB .

Exercice 19. Quaternions

- 1) Montrer que $\mathcal{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$ est un corps isomorphe à \mathbb{C} .
- 2) Montrer que $\mathcal{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \right\}$ est un corps non commutatif. On l'appelle le corps des Quaternions.

Exercice 20. Homographies.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note

$$f_M : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

Montrer que $M \rightarrow f_M$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

Exercice 21. Problème géométrique.

Soit A_1, \dots, A_n n points du plan. On cherche n points B_1, \dots, B_n du plan tels que pour tout entier $k \in [1, n]$, le point A_k soit le milieu du segment $[B_k, B_{k+1}]$ (avec par convention $B_{n+1} = B_1$). Dans la suite de l'exercice, on note z_M l'affixe d'un point M du plan.

- 1) Écrire le système vérifié par z_{B_1}, \dots, z_{B_n} .
- 2) Résoudre ce système pour $n = 3$ et $n = 4$. Donner une interprétation géométrique du résultat.
- 3) Résoudre le système dans le cas général.
- 4) Quel est l'inverse de la matrice du système quand elle est inversible ? Sinon, quel est son rang ?

Exercice 22. Échange de lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et B la matrice obtenue en échangeant dans A les colonnes i et j . Montrer que B est aussi inversible. Et qu'on passe de A^{-1} à B^{-1} en échangeant les lignes i et j .

Exercice 23. M antisymétrique $\implies I + M$ est inversible.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- 1) Montrer que $I + M$ est inversible.
Indication : si $MX = -X$, calculer ${}^t(MX)(MX)$.
- 2) Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Fin.