CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Polynômes* *Fractions rationnelles*

Blague du jour :
Une administration est complètement envahi de souris. On fait appel à un dératiseur qui, sans succés, décide de laisser un chat sur place pour quelque temps. Et très vite, on ne voit plus aucune souris. Le responsable de l'administration, très content des services du chat demande au dératiseur de laisser le chat rester dans les locaux. Quelques mois plus tard, les souris font leur réapparition dans le bâtiment... Le gars refait passer le dératiseur et lui demande ce qui a pu se passer. Le dératiseur répond :
- C'est le chat... Maintenant qu'il est titularisé...

Mathématicien du jour ***Legendre***
Adrien-Marie Legendre (1752-1833), est un mathématicien français. Il fit d'importantes contributions à la statistique, à la théorie des nombres, aux algèbres abstraites et à l'analyse. Une grande partie de son travail fut perfectionné par d'autres : son travail sur les racines des polynômes inspira la théorie de Galois ; le travail de Abel sur les fonctions elliptiques fut construit sur celui de Legendre ; certains travaux de Gauss en statistique et en théorie des nombres complétèrent ceux de Legendre.
Dans ses travaux de géométrie, Legendre reste connu pour avoir tenté de démontrer en vain le cinquième postulat d'Euclide. En arithmétique d'avoir finalisé la preuve du dernier théorème de Fermat pour $n = 5$, d'avoir apporté des éléments de preuve à la loi de réciprocité quadratique, conjecturée par Euler et prouvée ultérieurement par Gauss. Et enfin son théorème : le nombre d'entiers premiers supérieur à x est équivalent à $\dfrac{x}{\ln x}$.

Polynômes

Exercice 1 . **Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.**
Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Exercice 2 . **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de :**

1) X^n **par** $(X-1)(X-2)$ **et par** $(X-1)^2$.
2) $(X\cos(\theta) + \sin(\theta))^n$ **par** X^2+1, **où** $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 3 . **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ donnés.**

1) **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :** $(z+1)^n = e^{2ina}$.
2) **En déduire** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 4 **. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.**

1) **Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $\sum_{k=0}^{n} X^k$.**
2) **En déduire $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.**

Exercice 5 **. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 ?**

Exercice 6 **. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ ainsi que leurs multiplicités dans le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$**

Exercice 7 **. Soit $n \in N^*$. Calculer le quotient de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$.**

Exercice 8 **. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : $X^6+1, \quad X^8+X^4+1$.**

Exercice 9 **. Déterminer tous les polynômes solutions des équations différentielles suivantes :**

1) $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$
2) $XP"(X) - (X+m)P'(X) + nP(X) = 0$
3) $(1+X)^2 P"(X) - (2X+1)P'(-X) + 2P(X) = 0$
4) $4P(X) = (X-1)P'(X) + P"(X)$.
   Commencer d'abord par déterminer leurs degrés.

Exercice 10 **. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la multiplicité de la racine 1 dans le polynôme suivants :**

1) $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.
2) $X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$.

Exercice 11 **. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X], p = \deg A$ et $q = \deg B$.**
On considère l'application : $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & UA+VB \end{array}$
Démontrer que : $A \wedge B = 1 \iff \Phi$ est bijective.

Exercice 12 **. Linéarité du reste et du quotient.**
Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :
$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & R \end{array}$ **et** $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{array}$
avec : $P = QB + R$.

1) **Montrer que Φ et Ψ sont linéaires.**
2) **Chercher leurs noyaux et leurs images.**
3) **Simplifier $\Phi(P_1P_2)$, pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]$.**

Exercice 13 **.Polynômes d'interpolation de Lagrange.**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ **continue et** $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ **réels de** $[0,1]$ **deux à deux distincts, on pose** $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{X-r_i}{r_k-r_i}$.

1) **Calculer** $L_k(r_j)$ **pour** $1 \leq j,k \leq n$.
2) **Montrer que pour tout** $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$**, on a :** $P(X) = \sum_{k=1}^{n} P(r_k)L_k(X)$

   On pourra s'intéresser aux racines de $Q(X) = P(X) - \sum_{k=1}^{n} P(r_k)L_k(X)$.
3) **En déduire que la famille** $(L_k)_{1\leq k\leq n}$ **est une base de** $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4) **Exprimer tout** $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ **dans cette base.**
5) **En déduire que** $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ **qui interpole** f **aux point** $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ **càd** $f(r_k) = P(r_k)$ **pour tout** $1 \leq k \leq n$

Exercice 14 **.Polynômes de Legendre.**
On pose : $P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1) **Précisez les racines de** $(X^2-1)^n$ **ainsi que leurs multiplicités.**
2) **Montrer par récurrence sur** $0 \leq k \leq n$ **que** $((X^2-1)^n)^{(k)}$ **admet au moins** k **racines distinctes dans** $]-1,1[$.
3) **En déduire que** $((X^2-1)^n)^{(n)}$ **admet exactement** n **racines distinctes dans** $]-1,1[$.

Exercice 15 **.Polynômes de Tchebechev.**
On pose : $T_n(X) = \cos(n \arccos(x))$ **pour tout** $x \in [-1,1]$.

1) **Trouver une relation de récurrence entre** T_{n+1}, T_n, T_{n-1}.
2) **Montrer que** T_n **est un polynôme de degré** n **, préciser son coefficient dominant.**
3) **Montrer que** $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ **pout tout réel** t.
4) **En déduire les racines de** T_n.

Exercice 16 **. Polynômes de degrés échellonés.**
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **une famille de polynôme de degrés échellonés, c-à-d : deg**$(P_k) = k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$**, montrer qu'elle est libre.**

Exercice 17 **. Valeur moyenne.**
Soient $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ **tels que :** $\forall\ P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$**, on a :** $P(z_0) = \dfrac{P(z_1)+\cdots+P(z_n)}{n}$**. On note** $\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-z_i)$.

1) **Calculer** $\dfrac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k}$.
2) **En déduire que** $\Phi(X) = \dfrac{(X-z_0)\Phi'(X)}{n} + \Phi(z_0)$.
3) **Démontrer que** $z_1, \ldots, z_n$ **sont les sommets d'un polygone régulier de centre** z_0.
4) **Étudier la réciproque ?**

Exercice 18 . **Racines réelles simples.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ **dont les racines sont réelles simples.**

1) **Démontrer que :** $\forall\ x \in \mathbb{R}$**, on a** $P(x)P''(x) \leq P'^2(x)$.
2) **Démontrer que :** $\forall\ k \in \{1, \ldots, n-1\},\ a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 19 . **Relations entre racines et coéfficients d'un polynôme.**

1) **Résoudre dans** $\mathbb{C}$ **l'équation :** $z^5 + 6z^3 - 2z^2 + 5z - 10 = 0$**, sachant que 1 est une racine et qu'il y a deux racines dont le produit est égal à 5.**
2) **Résoudre dans** $\mathbb{C}$ **l'équation :** $6x^6 - 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$**, sachant que 1 et -1 sont racines puis poser** $y = x + \dfrac{1}{x}$.
3) **Soit** p**,** q **et** r **trois nombres complexes et** a, b, c **les trois racines du polynôme** $X^3 + pX^2 + qX + r$**. Calculer en fonction de** p**,** q **et** r **l'expression** $a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b$.
4) **On considÃ¨re le polynôme :** $X^4 + pX^2 + qX + r$ **avec** $r \neq 0$**. On note** $x_1, \ldots, x_4$ **ses racines.**
   Calculer les expressions suivantes en fonction de p**,** q **et** r **:** $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$, $\quad \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} + \dfrac{1}{x_4^2}$.
5) **Résoudre dans** $\mathbb{C}$ **le système suivant :**

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = -1 \end{cases}$$

Exercice 20 . **Critère d'Eisenstein d'irréductibilité dans** $\mathbb{Q}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ **à coefficients dans** $\mathbb{Z}$ **tel qu'il existe** p **nombre premier vérifiant :**p **divise** a_k **pour** $0 \leq k \leq n-1$ **et** p **ne divise pas** a_n **et** p^2 **ne divise pas** a_0 **.**

1) **Montrer que le polynôme** P **est irréductible dans** $\mathbb{Q}[X]$.
2) ***Application*** **: Montrer que les polynômes suivant sont irréductibles sur** $\mathbb{Q}$ **:**
   a) $X^p + p$ **où** p **est premier.**
   b) $-3X^{14} + 2X^8 + 8X^3 - 26X^2 + 6$.

Exercice 21 . **Nombre algébrique rationnel.**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$**. On dit que** α **est algébrique s'il existe un polynôme** $P \in \mathbb{Q}[X]$ **tel que** $P(\alpha) = 0$.
On dit que P **est un polynôme annulateur de** a**. Le polynôme annulateur de** a**, unitaire de plus bas degré est appelé polynôme minimal de** α **et se note** π_a.

1) **Justifier l'unicité d'un tel polynôme quand** a **est algébrique.**
2) **Montrer que** i **et** $\sqrt{2}$ **sont algébriques, préciser leurs polynômes minimaux.**
3) **Soit** α **algébrique de polynôme minimal** P**. Démontrer que** P **est irréductible dans** $\mathbb{Q}[X]$ **et que** α **est racine simple de** P.
4) **Soit** α **algébrique, et** $P \in \mathbb{Q}[X]$ **tel que** $P(\alpha) = 0$**. On suppose que la multiplicité de** α **dans** P **est strictement supérieure à** $\dfrac{1}{2}\deg P$**. Démontrer que** $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 22 . **Opérateur des différences finies.**

On pose $U_0(X) = 1$

$U_1(X) = X$

$$U_p(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}, \quad \forall p \geq 2$$

et $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

1) **Montrer que Δ est linéaire.**
2) **Déterminer $\ker \Delta$.**
3) **Montrer que $\deg \Delta P = \deg P - 1$, pour tout polynôme P non constant.**
4) **En déduire que $\Delta^{n+1} P = 0 \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X]$.**
   On rappelle que : $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$ et que $\Delta^0(P) = P$.
5) **Démontrer que la famille $(U_p)_{0 \leq p \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.**
6) **Calculer $\Delta(U_p)$, puis $\Delta^n(U_p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.**
7) **Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\Delta^k(P)(0) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$, montrer que $P = 0$.**
8) **En déduire que : $\forall \ P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :**

$$P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$$

9) **Conclure que $(U_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.**
10) **Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :**
    $P(n) \in \mathbb{Z}, \quad \forall \ n \in \mathbb{Z}$ **si et seulement si les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières.**
11) **Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists \ n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^n(f) = 0$.**

Exercice 23 . **Endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ qui commutent avec la dérivation.**

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ commutant avec la dérivation, c'est à dire : $\forall \ P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\Phi(P') = \Phi(P)'$.

1) **Démontrer qu'il existe un unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de scalaires tels que :**
   $\forall \ P \in \mathbb{K}_n[X],$ **on a :** $\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$.
2) **Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \longrightarrow P(X+1)$.**

Exercice 24 . **Lemme de Gauss.**

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On appelle contenu de P le pgcd des coefficients de P, on le nota par : cont(P).

1) **Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ avec cont$(P) = 1$, et $R = PQ$. Soit p un facteur premier de cont(R).**
   a) **Si p est premier avec le coefficient constant de P, Démontrer que p divise tous les coefficients de Q.**
   b) **Si p divise le coefficient constant de P, se ramener au cas précédent.**
   c) **En déduire que cont$(Q) =$ cont(R).**
2) **Lorsque cont$(P) \neq 1$, trouver cont(PQ).**
3) **Application : Soit $R \in \mathbb{Z}[X]$, et $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ proportionnels à P et Q et tels que $R = P_1 Q_1$.**
   cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur $\mathbb{Q}$ est aussi réductible sur $\mathbb{Z}$.

Fractions rationnelles.

Exercice 25 . **Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :**

1) $\dfrac{1}{X^2\left(X^2-1\right)^2\left(X^2+1\right)^2}$ ***On pourra utiliser la parité pour réduire les calculs.***

2) $\dfrac{1}{\left(X^3-1\right)^2}$ ***On pourra remarquer que :*** $F(x)=F(jX)$

3) $\dfrac{X^2-X+1}{X^2(1-X)^2}$ ***On pourra remarquer que :*** $F(1-X)=F(X)$

Exercice 26 . **Simplifier les expressions :**

$$F(X)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)} \quad | \quad H(X)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

$$G(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{(X+2^k)(X+2^{k+1})} \quad | \quad K(X)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2}$$

Exercice 27 .

1) Calculer la dérivée n^{eme} de l'expression : $\dfrac{1-t\cos(a)}{1-2t\cos(a)+t^2}$.

2) Donner une primitive de : $\dfrac{t^3}{(t^2-1)^2}$

Exercice 28 . **Déterminer les réels p,q pour que les résidus de $\dfrac{X^2+pX+q}{\left(X^2-1\right)^2}$ aux pôles 1 et -1 soient nuls.**
<u>Rappel</u> : ***On rappelle que le résidu d'un pôle a est le coefficient de $\dfrac{1}{X-a}$ dans la partie polaire relative à ce pôle .***

Exercice 29 . **Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de racines $z_1,\dots,z_n$ avec les multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. En utilisant la décomposition en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$, montrer que toute racine, z de P' est barycentre de $z_1,\dots,z_n$, c'est à dire s'écrit sous la forme : $z=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i$, avec $0\leq\lambda_i\leq 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.**

Exercice 30 . **Partie polaire pour un pôle d'ordre 2.**
Soit $F(X)=\dfrac{1}{R(X)}=\dfrac{1}{(X-a)^2Q(X)}$ **avec** $Q(a)\neq 0$.

1) Montrer que la partie polaire de F en a s'écrit sous la forme :
$$F_a(X)=\frac{1}{Q(a)(X-a)^2}-\frac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)}$$

2) En déduire que la partie polaire de F en a s'écrit sous la forme : $F_a(X)=\dfrac{2}{R''(a)(X-a)^2}-\dfrac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}$.

Fin
à la prochaine