

FEUILLE D'EXERCICES : *Polynômes.*

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X - a)^k(X - b)^{n-k}$.
Démontrer que la famille (P_0, \dots, P_n) est libre.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de :

- 1) X^n par $(X - 1)(X - 2)$ et par $(X - 1)^2$.
- 2) $(X \cos(\theta) + \sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$, où $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $(X + 1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ donnés.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(z + 1)^n = e^{2ina}$.
- 2) En déduire $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $\sum_{k=0}^n X^k$.
- 2) En déduire $\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 6. Déterminer les racines dans \mathbb{C} ainsi que leurs multiplicités dans le polynôme : $\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le quotient de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X - 1)^2$.

Exercice 8. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : $X^6 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 9. Déterminer tous les polynômes solutions des équations différentielles suivantes :

- 1) $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$
- 2) $XP''(X) - (X + m)P'(X) + nP(X) = 0$
- 3) $(1 + X)^2P''(X) - (2X + 1)P'(-X) + 2P(X) = 0$
- 4) $4P(X) = (X - 1)P'(X) + P''(X)$.
Commencer d'abord par déterminer leurs degrés.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la multiplicité de la racine 1 dans le polynôme suivants :

- 1) $X^{2n+1} - (2n + 1)X^{n+1} + (2n + 1)X^n - 1$.
- 2) $X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2 - 1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$.

Exercice 11. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $p = \deg A$ et $q = \deg B$.

On considère l'application : $\Phi : \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{p+q-1}[X]$
 $(U, V) \longmapsto UA + VB$

Démontrer que : $A \wedge B = 1 \iff \Phi$ est bijective.

Exercice 12. Linéarité du reste et du quotient.

Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :

$\Phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\Psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P \longmapsto R$ $P \longmapsto Q$

avec : $P = QB + R$.

- 1) Montrer que Φ et Ψ sont linéaires.
- 2) Chercher leurs noyaux et leurs images.
- 3) Simplifier $\Phi(P_1 P_2)$, pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 13. Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ réels de $[0, 1]$ deux à deux

distincts, on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - r_i}{r_k - r_i}$.

- 1) Calculer $L_k(r_j)$ pour $1 \leq j, k \leq n$.
- 2) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $P(X) = \sum_{k=1}^n P(r_k) L_k(X)$
On pourra s'intéresser aux racines de $Q(X) = P(X) - \sum_{k=1}^n P(r_k) L_k(X)$.
- 3) En déduire que la famille $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- 4) Exprimer tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.
- 5) En déduire que $\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpole f aux points $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ c-à-d $f(r_k) = P(r_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$

Exercice 14. Polynômes de Legendre.

On pose : $P_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

- 1) Précisez les racines de $(X^2 - 1)^n$ ainsi que leurs multiplicités.
- 2) Montrer par récurrence sur $0 \leq k \leq n$ que $((X^2 - 1)^n)^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $] -1, 1[$.
- 3) En déduire que $((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ admet exactement n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Exercice 15. Polynômes de Tchebechev.

On pose : $T_n(X) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

- 1) Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1} .
- 2) Montrer que T_n est un polynôme de degré n , préciser son coefficient dominant.
- 3) Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout réel t .
- 4) En déduire les racines de T_n .

Exercice 16. Polynômes de degrés échellonnés.

Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynôme de degrés échellonnés, c-à-d : $\deg(P_k) = k, \forall k \in \mathbb{N}$, montrer qu'elle est libre.

Exercice 17. Racines réelles simples.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.

- 1) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$.
- 2) Démontrer que : $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 18. Valeur moyenne.

Soient $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a :

$$P(z_0) = \frac{P(z_1) + \dots + P(z_n)}{n}. \text{ On note } \Phi(X) = \prod_{i=1}^n (X - z_i).$$

- 1) Calculer $\frac{\Phi(z_0)}{z_0 - z_k}$.
- 2) En déduire que $\Phi(X) = \frac{(X - z_0)\Phi'(X)}{n} + \Phi(z_0)$.
- 3) Démontrer que z_1, \dots, z_n sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0 .
- 4) Étudier la réciproque ?

Exercice 19. Relations entre racines et coefficients d'un polynôme.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^5 + 6z^3 - 2z^2 + 5z - 10 = 0$, sachant que 1 est une racine et qu'il y a deux racines dont le produit est égal à 5.
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $6x^6 - 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$, sachant que 1 et -1 sont racines puis poser $y = x + \frac{1}{x}$.
- 3) Soit p, q et r trois nombres complexes et a, b, c les trois racines du polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$. Calculer en fonction de p, q et r l'expression $a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b$.
- 4) On considère le polynôme : $X^4 + pX^2 + qX + r$ avec $r \neq 0$. On note x_1, \dots, x_4 ses racines.

Calculer les expressions suivantes en fonction de p, q et r :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}.$$

- 5) Résoudre dans \mathbb{C} le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1 \end{cases}$$

Exercice 20. Critère d'Eisenstein d'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ à coefficients dans \mathbb{Z} tel qu'il existe p nombre premier vérifiant : p divise a_k pour $0 \leq k \leq n-1$ et p ne divise pas a_n et p^2 ne divise pas a_0 .

- 1) Montrer que le polynôme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- 2) Application : Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur \mathbb{Q} :
 - a) $X^p + p$ où p est premier.
 - b) $-3X^{14} + 2X^8 + 8X^3 - 26X^2 + 6$.

Exercice 21. Nombre algébrique rationnel.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

On dit que P est un polynôme annulateur de a . Le polynôme annulateur de a , unitaire de plus bas degré est appelé polynôme minimal de α et se note π_a .

- 1) Justifier l'unicité d'un tel polynôme quand a est algébrique.
- 2) Montrer que i et $\sqrt{2}$ sont algébriques, préciser leurs polynômes minimaux.
- 3) Soit α algébrique de polynôme minimal P . Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que α est racine simple de P .
- 4) Soit α algébrique, et $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. On suppose que la multiplicité de α dans P est strictement supérieure à $\frac{1}{2} \deg P$. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 22. Opérateur des différences finies.

On pose $U_0(X) = 1$
 $U_1(X) = X$
 $U_p(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}, \quad \forall p \geq 2,$ et

$$\Delta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$$P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$$

- 1) Montrer que Δ est linéaire.
- 2) Déterminer $\ker \Delta$.
- 3) Montrer que $\deg \Delta P = \deg P - 1$, pour tout polynôme P non constant.
- 4) En déduire que $\Delta^{n+1}P = 0 \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X]$.
 On rappelle que : $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \dots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$ et que $\Delta^0(P) = P$.
- 5) Démontrer que la famille $(U_p)_{0 \leq p \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.
- 6) Calculer $\Delta(U_p)$, puis $\Delta^n(U_p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 7) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\Delta^k(P)(0) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$, montrer que $P = 0$.
- 8) En déduire que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$$

- 9) Conclure que $(U_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- 10) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :
 $P(n) \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières.
- 11) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^n(f) = 0$.

Exercice 23. Endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ qui commutent avec la dérivation.

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ commutant avec la dérivation, c'est à dire : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\Phi(P') = \Phi(P)'$.

- 1) Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de scalaires tels que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \text{ on a : } \Phi(P) = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}.$$

- 2) Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \longrightarrow P(X+1)$.

Exercice 24. Lemme de Gauss.

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On appelle contenu de P le pgcd des coefficients de P , on le nota par : $\text{cont}(P)$.

- 1) Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ avec $\text{cont}(P) = 1$, et $R = PQ$. Soit p un facteur premier de $\text{cont}(R)$.
 - a) Si p est premier avec le coefficient constant de P , Démontrer que p divise tous les coefficients de Q .
 - b) Si p divise le coefficient constant de P , se ramener au cas précédent.
 - c) En déduire que $\text{cont}(Q) = \text{cont}(R)$.
- 2) Lorsque $\text{cont}(P) \neq 1$, trouver $\text{cont}(PQ)$.
- 3) Application : Soit $R \in \mathbb{Z}[X]$, et $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ proportionnels à P et Q et tels que $R = P_1Q_1$.
 cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur \mathbb{Q} est aussi réductible sur \mathbb{Z} .

Fin.