CPGE My Youssef, Rabat

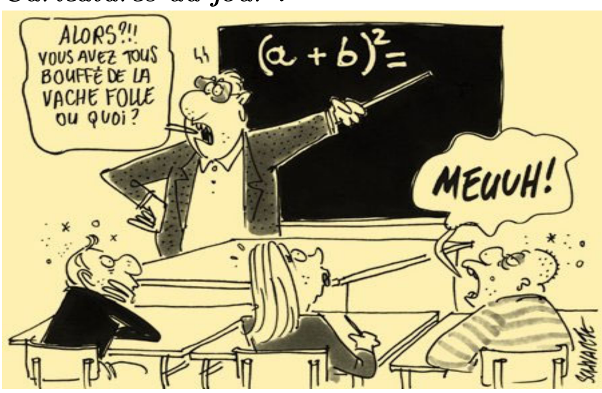
بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Nombres réels*

20 janvier 2009

Caricatures du jour : **Minkowski**



mathématicien du jour ***Minkowski***

Hermann Minkowski (1864 - 1909) est un mathématicien et un physicien théoricien allemand. Il gangna le Grand Prix de l'Académie des sciences de Paris après sa résolution du problème « *décomposition des nombres entiers en somme de cinq carrés* ». David Hilbert fût l'un de ses professeurs et Albert Einstein l'un de ses élèves. On lui doit surtout l'espace à 4 dimension (espace-temps) appelé de Minkowski, considéré comme la base de tous les travaux sur la théorie de la relativité. Son travail le plus « original » est sans aucun doute sa géométrie des nombres. Ces travaux posent de nombreuses questions sur le gain de place, ou comment faire rentrer une forme donnée à l'intérieur d'une autre forme donnée.

Exercice 1 . **En vrac**

1) **Montrer que :** $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.
2) **Soit** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. **Montrer que :**
   a) $|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|$.
   b) $1+|xy-1|\leq(1+|x-1|)(1+|y-1|)$.
3) **Soit** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **tel que :** $\forall\varepsilon>0$ **on ait :** $a<b+\varepsilon$.
   Montrer de deux façons différentes, par l'absurde et en utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure, que : $a\leq b$.

Exercice 2 . **Racine carrée.**

1) **Pour** $a\in[1,+\infty[$, **simplifier** $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
2) **Résoudre l'équation** $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ **d'inconnue** $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 **. *Inégalités classiques.***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ **des nombres réels.**

1) ***Inégalité de Minkowski :*** **Montrer que :**

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2) **On se propose de montrer par récurrence que pour** $n \in \mathbb{N}^*$ **la propriété suivante :**
$\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$
   a) **Vérifier le résultat pour** $n = 1$**.**
   b) **On suppose le résultat vrai pour toute famille à** n **éléments, et soit** $(x_i)_{1\leq i\leq n+1} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ **tel que** $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq n+1$**.**
      i. **Montrer que :** $\exists i \in [|1, n+1|]$ **tel que** $x_i \leq 1$**.**
      On prend $i = n+1$**, quitte à changer les indices..**
      ii. **Appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille** $y_i = \dfrac{n}{n+1-x_{n+1}}x_i$ **où** $1 \leq i \leq n$**, puis en déduire que :**

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i \leq x_{n+1}\left(\frac{n+1-x_{n+1}}{n}\right)^n$$

      iii. **Etudier sur** $[0,1]$**, la fonction** $f(t) = t\left(\dfrac{n+1-t}{n}\right)^n$**.**
      iv. **Conclure.**

3) ***Inégalite arithmico-géométrique :*** **En déduire que** $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$**.**

Exercice 4 **. Déterminer, quand elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :**

1) $A = \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2) $B = \left\{n^2 + \dfrac{1+(-1)^n}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3) $C = \left\{E(x) + E\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ tel que } x > 0\right\}$.
4) $D = \left\{\dfrac{p-q}{p+q+1} \text{ tel que } (p,q) \in \mathbb{N}^2; p \geq q\right\}$.
5) $E = \left\{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \text{ tel que } (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.
6) $F = \left\{1 - \dfrac{1}{n-m} \text{ tel que } (n,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } n \neq m\right\}$.

Exercice 5 **. Point fixe.**
Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ **croissante. On pose** $A = \{x \in [a,b] \text{ tel que } f(x) \geq x\}$

1) **Montrer que A est non vide majoré. On pose** $c = \sup(A)$**.**
2) **Montrer que** $f(c) \geq c$ **puis** $f(c) \leq c$**.**
3) **Conclure.**

Exercice 6 . **Principe des pigeoniers.**

1) **Enoncer le *lemme des tiroirs* .**
2) **Soit** $n \in \mathbb{N}$ **et** $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ **une famille de réels tous dans l'intervalle** $[0,1]$**. Montrer que :** $\exists (i,j) \in [0,1]^2$ **tel que** $i \neq j$ **et** $|x_i - x_j| \leq \dfrac{1}{n}$ **.**
3) **Soit** $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$**. Montrer que :**

$$\exists (p,q) \in \mathbb{N}\times[|1,n|] \text{ tel que } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Indication : Prendre $x_i = ix - E(ix)$ ***avec*** $i \in [|0,n|]$**.**

Exercice 7 . **Partie entière.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*, (x,y) \in \mathbb{R}^2$**. Montrer les propriétes suivantes :**

1) $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.
2) $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x)$.
   Indication : On pourra considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ ***par :*** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right)$***, montrer que*** $f(x+1) = f(x)+1, \quad f(x) = E(x) \quad \forall x \in [0,1[$***, puis conclure.***
4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.
   Indication : On pourra utiliser la question précédente.
5) $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$.
6) **Soient** $a \in \mathbb{Z}$ **et** $b \in \mathbb{N}^*$**. Montrer que :**
   $E\left(\dfrac{a}{b}\right) + E\left(\dfrac{a+1}{b}\right) + \cdots + E\left(\dfrac{a+b-1}{b}\right) = a$.
7) **Soient** $a \in \mathbb{R}$ **et** $b \in \mathbb{N}^*$**. Montrer que :**
   $E\left(\dfrac{a}{b}\right) + E\left(\dfrac{a+1}{b}\right) + \cdots + E\left(\dfrac{a+b-1}{b}\right) = E(a)$.
8) a) **Soit** $k \in \mathbb{N}^*$**. Montrer que :**
   $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

   b) **En déduire la valeur de** $E\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Exercice 8 . **Puissances.**

1) **Soient** $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ **et** $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$**. Montrer que** $(x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.
2) **Soient** $a \in \mathbb{R}^+$ **et** $n \in \mathbb{N}$**. Montrer que** $(1+a)^n \geq 1 + na$.
3) **Soient** a **et** b **deux nombres réels tels que** $0 < a < b$ **et** $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$**. Montrer que** $n(b-a)a^{n-1} \leq b^n - a^n \leq n(b-a)b^{n-1}$.
4) **Soient** a, b **et** c **trois nombres réels positifs ou nuls. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels** $a(1-b)$, $b(1-c)$ **ou** $c(1-a)$ **est inférieur à** $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 9 . **Système non linéaire.**

1) **Soient** $x_1, \ldots, x_n$ **des nombres réels tels que** $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ **et** $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.
   Montrer que $x_i = 1$ **pour tout** $i \in [|1, n|]$.

2) **On suppose que** $(x, y, z, t) \in (\mathbb{R}^*)^4$ **vérifie le système** $\begin{cases} x + y + z = t \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{t} \end{cases}$
   Établir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, **et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.**

Exercice 10 . **Manipulation des sommes.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq m}$ **deux familles de réels.**

1) **Démontrer que :**
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).$$

2) **En déduire que :**
   a) **Si les deux suites sont croissantes, alors :**
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$
   b) **Si l'une des deux suites est croissante et l'autre décroissante, alors**
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Exercice 11 . **La mnémotechnie a pour but de faciliter le souvenir de données difficiles à retenir par la mémoire pure. Elle est utilisée par les étudiants qui doivent emmagasiner de nombreuses données chiffrées en géographie, en science, en mathématiques, de nombreuses dates en histoire, en littérature, etc. De même ceux qui participent à des jeux de radio ou de TV basés sur la mémoire font souvent appel à la mnémotechnie.**
Exemple : **Comment retenir les chiffres après la virgule de** π **?**
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages **, que=3, j=1, aime=4, donc** $\pi \approx 3,1415926535$, **en apprenant en plus cette phrase "*Immortel Archimède, artiste, ingénieur, Qui de ton jugement peut priser la valeur ? Pour moi ton problème eut de pareils avantages*", on retient 30 chiffres après la virgule.**

1) **Comment retenir les dérivées des fonctions sin(x) et cos(x) ?**
   Réponse **: C'est comme si**

2) **Comment retenir dans un condensateur, qui est en avance, le courant ou la tension ?**
   Réponse **: CIVIL**
   CIV : dans Condensateur (C), courant (I) puis tension (V), dans Bobine (L) l'inverse.

3) **Comment retenir la constante de temps d'un circuit RL ?**
   Réponse : L/R **bien sûr : l'aile (d'un oiseau) toujours en haut, et la terre en bas.**

4) **Une diode a 2 bornes, l'anode et le cathode. Mais qui est la borne positive et qui est la borne négative.**
   Réponse **: Retenez simplement que l'âne est plus gros que le chat.**

Fin
à la prochaine